Geometria I

10 aprile 2012

Esercizio 1. Siano

$$U = \{(2, 0, \alpha + 2) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad W = \{(\beta, \beta, 2\beta) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \beta \in \mathbb{R}\}$$

due sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

(a) Stabilire, motivandolo, se U e W sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$; in ogni caso determinare una base per la chiusura di ciascuno di essi.[Solo W è sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Base per la chiusura di U: $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$; base per la chiusura di W: $\{(1, 1, 2)\}$] $\boxed{4}$

(b) Determinare un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ per il quale

$$\ker f = < W > \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Im} f = < U >,$$

scrivendo la matrice che lo rappresenta rispetto alla base canonica.
[$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$] $\boxed{4}$

(c) Determinare un complemento diretto per $< W >$ in $\mathbb{R}^3$.
[Ad es. $< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >$] $\boxed{2}$

Esercizio 2. Al variare del parametro reale α, discutere e risolvere il sistema $\boxed{5}$

$$\begin{cases} \alpha x + \alpha y - \alpha t = 0 \\ 2(1 - \alpha)x + (\alpha - 1)t = 0 \\ (2 - \alpha)x + y + \alpha z = 0 \end{cases} .$$

[Il sistema è sempre compatibile. Ammette ∞^2 soluzioni per $\alpha = 0$ e per $\alpha = 1$; negli altri casi ha ∞^1 soluzioni. Le soluzioni sono: per $\alpha = 0$, il sottospazio generato da $\{(1, -2, 0, 2), (0, 0, 1, 0)\}$; per $\alpha = 1$, il sottospazio generato da $\{(1, 0, -1, 1), (0, 1, -1, 1)\}$; per $\alpha \neq 0, 1$: $\{\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, \frac{\alpha-3}{2\alpha}t, t\right) \in \mathbb{R}^4 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$]

Esercizio 3. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$, siano P il punto di coordinate $(1, 1, 1)$ ed α e β i piani di equazioni:

$$\alpha \ : \ 2x - y + z = 0 \qquad \text{e} \qquad \beta \ : \ 4x - 2y + hz = 3,$$

dove $h \in \mathbb{R}$.

(a) Provare che esistono rette passanti per P e parallele ad α e a β indipendentemente dal valore del parametro h.[Se $h \neq 2$ i piani sono incidenti. La retta in questione è quella passante per P e parallela alla retta $\alpha \cap \beta$. Se $h = 2$, allora i piani sono paralleli e le rette cercate sono infinite.] $\boxed{2}$

(b) Determinare i valori di h per il quale tale retta è unica. $\boxed{1}$

(c) Posto $h = 1$, determinare le equazioni parametriche della retta descritta in (a).
[$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$] $\boxed{3}$

(d) Posto $h = 2$, determinare le equazioni parametriche della retta passante per P e ortogonale al piano β. [$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$] $\boxed{2}$

Esercizio 4. Nel piano affine euclideo reale siano P il punto di coordinate $(0, -1)$ ed a la retta di equazione $y = x + 1$.

(a) Determinare un'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di iperboli passanti per l'origine $(0, 0)$ e per il punto $H(1, 0)$ e per le quali la retta a sia un asintoto. [$x^2 + (k - 2)xy + (1 - k)y^2 - x + (k + 1)y = 0$] $\boxed{4}$

(b) Determinare le coordinate proiettive omogenee del punto improprio dell'ulteriore asintoto b della generica conica di $\mathcal{F}$. [$(1 - k, 1, 0)$] $\boxed{2}$

(c) Scrivere un'equazione cartesiana della conica $\mathcal{C}$ per la quale la retta passante per P e perpendicolare a b abbia equazione $x - y - 1 = 0$. [$x^2 - y^2 - x + 3y = 0$] $\boxed{3}$