Geometria I

10 giugno 2014

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, sono dati:

$$V =< (1,k,1),\ (1,2,3),\ (3,4,5) >, \quad W =< (0,1,1),\ (,0,1,2) >,\ k \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare una base per $V + W$ e una base per $V \cap W$ (al variare di k). $\boxed{5}$

Posto $k = 1$:

(b) costruire un complemento diretto per $V \cap W$. $\boxed{1}$

(c) determinare un isomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(V) \subseteq V$ e $f(W) \subseteq W$.; $\boxed{3}$

(d) stabilire, motivando la risposta, se tale isomorfismo è unico. $\boxed{2}$

Esercizio 2. Sia k un parametro reale e siano $A_k \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ e $\vec{b_k} \in \mathrm{Mat}_{3,1}(\mathbb{R})$ le matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & k-1 & 1 \\ 1 & 2k & 0 \\ 1 & 2k+1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b_k} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4-k \\ 4-k \end{pmatrix}.$$

(a) Discutere, al variare di k, la risolubilità del sistema linare $A_k\vec{x} = \vec{b_k}$ $\boxed{3}$

(b) Posto $k = 0$, stabilire se la matrice A_0 è diagonalizzabile. $\boxed{3}$

Esercizio 3. Nello spazio euclideo reale, siano r ed s le rette di equazioni:

$$r \ : \ \begin{cases} y - 2z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}, \qquad s \ : \ \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = ht \end{cases}, h \in \mathbb{R}.$$

Determinare i valori del parametro h per i quali r è parallela a s e, per tali valori, la distanza tra le due rette. $\boxed{5}$

Esercizio 4. Nel piano affine euclideo reale, sono date le coniche $\Gamma_1 \ : \ xy - 1 = 0$ e $\Gamma_2 \ : \ y^2 - x = 0$ e la retta $r \ : \ xy + 1 = 0$.
Indicato con R il generico punto della retta r, scrivere l'equazione cartesiana del luogo descritto dal punto di intersezione tra la polare di R rispetto a Γ_1 e la polare di R rispetto a Γ_2. $\boxed{7}$
Successivamente riconoscere tale luogo e determinare l'equazione dei suoi assi. $\boxed{4}$