Geometria I (completo)

11 febbraio 2014

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, si consideri la funzione $f : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ tale che $f(A) = A + kA^T$ per ogni $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, dove k è un parametro reale.

(a) Verificare che f è un endomorfismo per ogni $k \in \mathbb{R}$. $\boxed{3}$

(b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. $\boxed{4}$

(c) Determinare i valori di k per i quali f è un automorfismo. $\boxed{2}$

(d) Determinare i valori di k per i quali f è diagonalizzabile. $\boxed{4}$

Esercizio 2. Nel piano affine euclideo reale è data la conica $\mathcal{K}$ di equazione:

$$\mathcal{K} \; : \; x^2 + 9y^2 + 6xy - 4x - 16y + 4 = 0.$$

(a) Classificare la conica dal punto di vista affine e proiettivo. $\boxed{2}$

(b) Determinare le coordinate del suo centro e le equazioni degli assi. $\boxed{3}$

(c) Scrivere un'equazione del fascio di coniche al quale $\mathcal{K}$ appartiene e avente come punti base $A(1;1)$ con molteplicità 3 e $B(2;0)$ con molteplicità 1. $\boxed{4}$

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino i seguenti vettori:

$$\vec{v_1} = (1;1;0), \qquad \vec{v_2} = (1;2;0), \qquad \vec{v_3} = (0;0;1).$$

(a) Dopo aver verificato che l'insieme $\mathcal{B} = (\vec{v_1},\ \vec{v_2},\ \vec{v_3})$ costituisce una base di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, determinare la forma bilineare simmetrica $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ per la quale $\mathcal{B}$ sia una base ortogonale e tale che:

$$g(\vec{v_1}, \vec{v_1}) = 0, \qquad g(\vec{v_2}, \vec{v_2}) = 1, \qquad g(\vec{v_3}, \vec{v_3}) = 2.$$

$\boxed{6}$

(b) Scrivere la matrice A associata a g rispetto alla base $\mathcal{B}$ e la matrice A' associata a g rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. $\boxed{4}$

(c) Stabilire se g è una forma bilineare definita positiva. $\boxed{2}$