Geometria I

11 settembre 2012

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri l'endomorfismo f definito da

$$f(x, y, z) = (kx + (1 - k)y, -kx + ky + kz, -3x + (2 - k)y + kz),$$

dove k è un parametro reale.

(a) Stabilire per quali valori di k l'endomorfismo f è un automorfismo.
[$k \neq -3, 0, 1$] $\boxed{2}$

(b) Determinare, al variare di k, una base e la dimensione per $\mathrm{Im}f$ e $\mathrm{Ker}f$.
[Se $k \neq -3, 0, 1$, allora $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^3, \mathrm{Ker}f = \{\vec{0}\}$;
se $k = -3$, allora $\mathrm{Im}f =< (1, -1, 1), (0, 1, 1) >, \mathrm{Ker}f =< (4, 3, 1) >$;
se $k = 0$, allora $\mathrm{Im}f =< (0, 0, 3), (1, 0, 2) >, \mathrm{Ker}f =< (0, 0, 1) >$;
se $k = 1$, allora $\mathrm{Im}f =< (1, -1, 3), (0, 1, 1) >, \mathrm{Ker}f =< (0, 1, -1) >$.] $\boxed{4}$

(c) Stabilire per quali valori di k si ha $\mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f = \mathbb{R}^3$. [$k \neq 0$] $\boxed{2}$

Esercizio 2. Si consideri, al variare del parametro reale t, la seguente matrice di $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}.$$

Determinare gli eventuali valori di t per cui:

(a) la matrice M è diagonalizzabile;
[Diagonalizzabile per ogni $t \in \mathbb{R}$] $\boxed{3}$

(b) interpretando M come la matrice di rappresentazione di una forma bilineare, essa è anche un prodotto scalare definito positivo.
[$t > 0$] $\boxed{2}$

Esercizio 3. Nel piano affine euclideo reale è dato il fascio di coniche

$$\mathscr{F} \ : \ (1 + k)x^2 + y^2 - ky - k - 1 = 0.$$

(a) Studiare la natura del fascio $\mathscr{F}$, determinare le coordinate dei punti base e fornire una rappresentazione nel piano cartesiano delle coniche generatrici.
[Fascio di coniche tangenti alla retta $y + 1 = 0$ nel punto (0;-1); gli altri due punti base sono $(\pm 1; 0)$] $\boxed{4}$

(b) Scrivere le equazioni delle coniche degeneri del fascio.
[$(x - y - 1)(x + y + 1) = 0; \quad y(y + 1) = 0$] $\boxed{2}$

(c) Determinare la conica $\mathscr{C}$ di $\mathscr{F}$ rispetto alla quale il punto $P(-2;0)$ è polo della retta $p\ :\ 8x+y+4=0$. Studiare la conica $\mathscr{C}$ (classificazione affine e proiettiva, centro, asintoti, assi). [$\mathscr{C}\ :\ 2x^2+y^2-y-2=0$, ellisse generale, centro: $(0;1/2)$, asintoti: $2\sqrt{2}x \pm 2iy \mp i=0$, assi: $x=0$, $y=1/2$] $\boxed{4}$

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ sono dati i punti $A(1;1;2)$ e $B(-1;1;0)$.

(a) Verificare che la retta per A e per B è sghemba con l'asse x. $\boxed{2}$

(b) Determinare il punto C dell'asse x equidistante da A e da B. [$C(1;0;0)$] $\boxed{2}$

(c) Scrivere l'equazione del piano per A, B e C. [$x+2y-z-1=0$] $\boxed{2}$

(d) Scrivere le equazioni della circonferenza passante per A, B e C.
[$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}=0=x+2y-z-1$] $\boxed{4}$