Geometria I (completo)

13 febbraio 2013

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono dati gli insiemi:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 0 = y\} \quad \text{e} \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 0 = y + z\}$$

(a) Dopo aver verificato che U e V sono sottospazi vettoriali, determinare $U + V$. Dire, motivandolo, se tale somma è diretta. $\boxed{4}$
[Somma diretta]

(b) Determinare un isomorfismo $f \ : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(U) = U'$ e $f(V) = V'$, dove

$$U' =< (1, 0, 0) > \quad \text{e} \quad V' =< (-2, 0, 1) > .$$

Dire se tale isomorfismo è unico, motivando l'affermazione. $\boxed{3}$
[Non è univocamente determinato. Ad es.: $f(x, y, z) = (y - z, x, y)$]

(3) Rispetto al prodotto scalare canonico, scrivere una base per $U^{\perp} \cap V^{\perp}$ e determinare un complemento ortogonale per $f(0; 1; 0)$. $\boxed{5}$
[Base per $U^{\perp} \cap V^{\perp}$: { (1;0;0) }. Complemento ortogonale: $< (0; 1; 0), (1; 0; 1) >$]

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ sono dati il punto $P(1; 1; 1)$ e la retta r di equazioni:

$$r \ : \ \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases} .$$

Determinare:

(a) un'equazione cartesiana del piano π passante per r e per il punto A(2;0;0); $\boxed{2}$
[$2x + 5y + 3z + 4 = 0$]

(b) un'equazione cartesiana del piano ortogonale alla retta r e passante per P; $\boxed{2}$
[$2x + y + 3z - 6 = 0$]

(c) il luogo descritto dai centri delle sfere di raggio unitario passanti per P e ivi tangenti la retta r. $\boxed{4}$
[$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 - 1 = 0 = 2x + y + 3z - 6$]

Esercizio 3. Nel piano proiettivo complesso, sia $\mathscr{C}$ la conica:

$$\mathscr{C} \ : \ x^2 + y^2 - 2xy - 2y + 4 = 0$$

.

(a) Riconoscere la conica. $\boxed{1}$

[Parabola generale]

(b) Determinare le coordinate del centro, le equazioni degli assi e le coordinate dei vertici. $\boxed{3}$

[Centro: $[(1;1;0)]$, Asse: $2x-2y+1=0$, Vertice: $(13/8;17/8)$]

(c) Nella polarità indotta da $\mathscr{C}$, determinare le coordinate del punto P, polo della retta $p\ :\ x+3=0$ e le coordinate del coniugato Q di P, appartenente alla retta $q\ :\ x-y-2=0$. $\boxed{4}$

[$P(6;7)$, $Q(-3;-5)$]

Esercizio 4. Si considerino i seguenti spazi vettoriali sul campo reale: $\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$, spazio vettoriale delle matrici simmetriche, di ordine 2, a coefficienti reali e $\mathbb{R}_2[x]$, spazio vettoriale dei polinomi di grado al più due a coefficienti reali, nell'indeterminata x.

Sia $f\ :\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}_2[x]$ l'omomorfismo che associa a ogni matrice $A\in\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ il polinomio $\mathrm{tr}A+1/2(\mathrm{tr}'A)x$, dove tr è la traccia, cioè la somma degli elementi sulla diagonale principale di una matrice e tr' è la somma degli elementi posti sulla diagonale secondaria.

(a) Determinare una base per $\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ (come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$). $\boxed{1}$

$[\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}]$

(b) Scrivere la matrice che rappresenti f rispetto alla base in (a) e rispetto alla base canonica $(1,x,x^2)$ di $\mathbb{R}_2[x]$. $\boxed{2}$

$[\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}]$

(c) Determinare una base per il nucleo e una base l'immagine di f. $\boxed{3}$

[Base nucleo: $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$, Base immagine: $\{1,x\}$]

(d) Stabilire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, diagonalizzarlo. $\boxed{4}$

[Diagonalizzabile, $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$]