Geometria I

15 luglio 2014

Esercizio 1. Nel piano affine euclideo reale, sia $\mathscr{F}$ il fascio di coniche:

$$(1+k)x^2 + y^2 - k - 4 = 0,$$

al variare del parametro reale k.

(a) Determinare le equazioni delle coniche generatrici di $\mathscr{F}$ ed effettuarne le classificazioni affine e proiettiva. [$x^2 + y^2 - 4 = 0$, ellisse generale (circonferenza), $(x-1)(x+1) = 0$, parabola degenere] $\boxed{4}$

(b) Trovare le coordinate dei punti base del fascio. [$(\pm 1; \pm\sqrt{3})$] $\boxed{2}$

(c) Determinare le coordinate del centro delle coniche del fascio. [$(0; 0)$] $\boxed{2}$

(d) Studiare la conica $\mathscr{C}$, ottenuta ponendo $k = 1$ (determinare le direzioni degli assi e le coordinate dei vertici), e rappresentare nel piano cartesiano le coniche generatrici e la conica $\mathscr{C}$. [$2x^2 + y^2 - 5 = 0$, ellisse generale, direzioni assi: $[(1, 0, 0)], [(0, 1, 0)]$, coordinate vertici: $(0; \pm\sqrt{5})$, $\left(\pm\frac{\sqrt{10}}{2}; 0\right)$] $\boxed{6}$

Esercizio 2. Siano $V(\mathbb{R})$ e $W(\mathbb{R})$ due spazi vettoriali con rispettive basi $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ e $\mathscr{B}' = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$. Sia $f : V \longrightarrow W$ la funzione definita da:

$$f(x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} + t\vec{e_4}) = (x + 2y + z + t)\vec{v_1} + (x + 2y)\vec{v_2} + (z + t)\vec{v_3}$$

(a) Verificare che f è un omomorfismo. $\boxed{2}$

(b) Determinare la matrice di f rispetto alle basi $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$. [$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$] $\boxed{1}$

(c) Considerato il caso particolare $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \mathbb{R}^3$ e con $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ le rispettive basi canoniche, determinare basi e dimensioni del nucleo e dell'immagine di f. [$\mathrm{Ker} f =< (-2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1) >$, $\mathrm{Im} f =< (1, 1, 0), (1, 0, 1) >$] $\boxed{4}$

(d) Nelle condizioni fissate al punto precedente, determinare l'insieme P delle preimmagini del vettore $\vec{v_1} + \vec{v_2}$ e stabilire se P è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. [$P = \{(1 - 2y, y, z, -z) \in \mathbb{R}^4 \ : \ y, z \in \mathbb{R}\}$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$] $\boxed{3}$

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si considerino il piano π e la retta r, di equazioni:

$$\pi \ : \ \alpha x - y + z = 0 \qquad r \ : \ \begin{cases} x + y - z = -1 \\ x + \alpha y + z = 0 \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di α:

(a) il piano π e la retta r sono paralleli e, in tal caso, determinare un'equazione cartesiana del piano contenente r e parallelo a π; $[\alpha = -1, \ x + y - z = -1]$ $\boxed{4}$

(b) il piano π e la retta r sono ortogonali; $[\nexists \alpha]$ $\boxed{2}$

(c) la retta r è complanare con l'asse y. $[\alpha = 0]$ $\boxed{2}$