Geometria I (completo)

17 settembre 2013

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha y + z = -2 \\ 2\alpha x + 7y + 3z = 8 \\ x + 2\alpha y = 7\alpha \end{cases}$$

(a) Discutere, al variare di α, la risolubilità del sistema. [Compatibile per $\alpha \neq -7/4$; in tal caso, se $\alpha \neq 1$ soluzione unica; se $\alpha = 1$, ∞^1 soluzioni] $\boxed{3}$

(b) Per $\alpha = 0$ dire, motivando la risposta, se l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. [Non lo è, il sistema non è omogeneo] $\boxed{2}$

(c) Per $\alpha = 1$ stabilire se la matrice dei coefficienti delle incognite del sistema è diagonalizzabile. [Sì, perché ha autovalori distinti] $\boxed{3}$

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ data la seguente forma bilineare simmetrica, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$f_k((x, y, z), (x', y', z')) = kxx' + yy' + kzz'$$

(a) Indicare i valori di k per i quali la funzione f_k è: (a.1) definita positiva; (a.2) definita negativa; (a.3) indefinita. [(a.1) $k > 0$, (a.2) $\nexists k \in \mathbb{R}$, (a.3) $k < 0$] $\boxed{3}$

(b) Posto $k = 2$, determinare una base per $\vec{v}^{\perp}$, dove $\vec{v} = (-1, -1, 0)$.
[$\{(1, -2, 0),\ (0, 0, 1)\}$] $\boxed{3}$

(c) Posto $k = 0$, determinare una base per il complemento ortogonale di $\mathbb{R}^3$.
[$\{(1, 0, 0),\ (0, 0, 1)\}$] $\boxed{2}$

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ siano:

$$t : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} 3x + y - 2z = 2 \\ x - 3y + 2 = 0 \end{cases}, \qquad r : \begin{cases} x - 5 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

tre rette.

(a) Verificare che t ed s sono sghembe. $\boxed{3}$

(b) Scrivere l'equazione della retta parallelela a r e incidente sia s sia t. [$x - 1 = 0 = y - z$] $\boxed{5}$

Esercizio 4. (a) Nel piano proiettivo, scrivere un'equazione del fascio di iperboli tangenti nell'origine alla retta $t : x + 2y = 0$ e aventi la retta $a : x + y + 1 = 0$ come asintoto. $[(k+1)x^2 + (2k+3)xy + (k+2)y^2 + x + 2y = 0]$ $\square$

(b) Determinare un'equazione dell'iperbole equilatera del fascio, le coordinate del suo centro e le equazioni dei suoi asintoti. [$x^2 - y^2 - 2x - 4y = 0$, centro: $(1; -2)$, asintoti: $x + y + 1 = 0$ e $x - y - 3 = 0$] $\square$