Geometria I

21 giugno 2011

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare reale

$$\begin{cases} hx = h \\ (h^2-1)x + (h+1)y + 2z = 1 \\ (1-h^2)x + y + z = 0 \end{cases},$$

dove h è un parametro reale.

(a) Discutere al variare di $h \in \mathbb{R}$ la compatibilià del sistema e, per i valori di h per cui il sistema è risolubile, determinare il numero delle soluzioni;

Posto $h = 0$ determinare:

(b) l'insieme S delle soluzioni e stabilire se S è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;

(c) una base e la dimensione di $V =< S >$;

(d) un complemento diretto per V in $\mathbb{R}^3$.

Posto ora $h = -1$:

(e) si stabilisca se la matrice A_{-1} dei coefficienti del sistema è diagonalizzabile e in caso affermativo, si determinino una matrice diagonale simile ad A_{-1} e la relativa matrice diagonalizzante.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$, date le rette:

$$r \ : \ \begin{cases} y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s \ : \ \begin{cases} x = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases},$$

determinare:

(a) le equazioni cartesiane della retta di minima distanza tra r ed s;
$[x = 0 = y - z]$

(b) un'equazione della sfera Γ tangente le due rette e avente centro sulla retta determinata al punto precedente;
$[x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0]$

(c) le coordinate dei centri e le misure dei raggi della circonferenza massima di Γ e della circonferenza individuata da Γ e dal piano α di equazione $2y - 1 = 0$.
$[(0, 1, 1)\,,\ r = \sqrt{2};\ \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)\,,\ r = \frac{\sqrt{7}}{2}]$

Esercizio 3. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, è data la conica $\mathscr{C}$ di equazione

$$\mathscr{C} \ : \ x^2 + 3xy + y^2 + x + y = 0.$$

Dopo averla studiata, determinando le coordinate del centro e le equazioni degli assi, scrivere l'equazione della tangente a $\mathscr{C}$ nell'origine del sistema di riferimento.
[Iperbole generale, centro: $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$, assi: $x-y=0$, $5x+5y+2=0$, tangente in O: $x+y=0$]
Successivamente:

(a) costruire il fascio $\mathscr{F}$ di coniche tangenti alla retta $t: \ x+y=0$ e passanti per i punti in cui $\mathscr{C}$ interseca gli assi coordinati;
[$kxy + (x+y+1)(x+y) = 0$]

(b) studiare il fascio $\mathscr{F}$ (determinare le equazioni delle coniche degeneri e classificare le coniche del fascio dal punto di vista affine e proiettivo, al variare del parametro);
[Coniche deg.: $xy = 0$, $(x+y+1)(x+y) = 0$; $k < -4 \cup k > 0$ iperboli gen., $k = -4$ parabola gen., $k = 0$ parabola deg., $-4 < k < 0$ ellissi gen.]

(c) costruire il fascio $\mathscr{F}'$ di iperboli equilatere aventi come asintoto la retta di equazione $x - 2y - 2 = 0$ e come diametro la retta t.
[$(6x + 3y - 2)(x - 2y - 2) + k = 0$]