Geometria I

23 settembre 2014

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ è dato l'endomorfismo:

$$f \ : \ \begin{cases} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c & -2d \end{bmatrix} \end{cases} .$$

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. [$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$]

(b) Provare che f non è diagonalizzabile.[L'autovalore 1 ha molteplicità geometrica (1) minore della molteplicità algebrica (3).]

(c) Determinare una base per il sottospazio W di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ che è somma degli autospazi dell'endomorfismo f. [$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$]

(d) Considerato il sottospazio

$$U = < \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} >$$

di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, dimostrare che $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) = W \oplus U$.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo reale, siano $A(2; -1; 1)$ e $B(0; 1; 2)$ due punti.

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente la retta AB e parallelo all'asse x. [$\pi \ : \ y - 2z + 3 = 0$]

(b) Determinare le equazioni dei piani α_1 e α_2 perpendicolari alla retta AB e distanti 3 da B. [$\alpha_1 \ : \ 2x - 2y - z + 13 = 0, \ \ \alpha_2 \ : \ 2x - 2y - z - 5 = 0$]

(c) Determinare un'equazione della sfera tangente ad α_1 e ad α_2 e avente centro sulla retta AB. [$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 4 = 0$]

Esercizio 3. (a) Nel piano affine euclideo reale, determinare un'equazione dell'iperbole tangente alle rette $r \ : \ x = 2$ ed $s \ : \ x = -2$ rispettivamente nei punti $R(2; 1)$ ed $S(-2; -1)$ e avente un asintoto di parametri direttori $(1; 1)$. [$y^2 - xy + 1 = 0$]

(b) Determinare le coordinate del centro dell'iperbole e l'equazione dell'altro asintoto. [$(0; 0), \quad y = 0$]