Geometria I

24 luglio 2012

Esercizio 1. Considerata la matrice M_k di $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ e il vettore $\vec{v_k}$ di $\mathbb{R}^3$, al variare del parametro reale k:

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & k(k+2) & k(k+2) \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_k} = \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

(a) discutere la risolubilità del sistema $M_k\vec{x} = \vec{v_k}$; [$k \neq 1, -3$ soluzione unica; $k = 1$ nessuna soluzione; $k = -3$ ∞^1 soluzioni] $\boxed{3}$

(b) posto $k = -3$, dire se l'insieme S delle soluzioni è sottospazio di $\mathbb{R}^3$, motivando la risposta; [No.] $\boxed{1}$

(c) posto $k = -3$, e considerato, per ogni fissato valore di $h \in \mathbb{R}$, l'insieme $T = \{(h, 0, 1,), (0, h, 1)\}$, determinare una base per la chiusura di T, per $< T > \cap < S >$ e per $< T > + < S >$;
[Se $h = 0$, $\mathscr{B}_{<T>} = \{(0, 0, 1)\}$; se $h \neq 0$, $\mathscr{B}_{<T>} = \{(h, 0, 1), (0, h, 1)\}$.
Se $h = 0$, $\mathscr{B}_{<T>+<S>}$ =b.c. di $\mathbb{R}^3$ e $< T > \cap < S >= \{\vec{0}\}$;
se $h = -1$, poiché $< S >=< T >$, allora $\mathscr{B}_{<T>+<S>} = \mathscr{B}_{<T>\cap<S>} = \mathscr{B}_{<T>}$;
se $h \neq -1, 0$, $\mathscr{B}_{<T>+<S>}$ =b.c. di $\mathbb{R}^3$ e $\mathscr{B}_{<T>\cap<S>} =< (1, -1, 0) >$] $\boxed{3}$

(d) posto $k = 1$, diagonalizzare la matrice M_k, indicando autovalori e autospazi.
[Autovalori: $0, 6, -2$; relativi autospazi: $< (-3, 1, 2) >, < (1, 7, 8) >, < (1, -1, 0) >$]
$\boxed{3}$

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, sia $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la forma bilineare tale che per ogni $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{w} = (y_1, y_2, y_3)$, $k \in \mathbb{R}$:

$$f(\vec{v}, \vec{w}) = 2x_1y_1 + kx_1y_2 + kx_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + kx_2y_3 + kx_3y_2.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali f è un prodotto scalare. [$\forall k \in \mathbb{R}$] $\boxed{1}$

(b) Determinare i valori di k per i quali la forma quadratica associata a f è definita positiva. [$\nexists k \in \mathbb{R}$] $\boxed{2}$

(c) Posto $k = 0$, e dato $\vec{v} = (3, 2, 1)$, determinare la dimensione e una base per $X = \vec{v}^{\perp}$ e per $Y = \left(\vec{v}^{\perp}\right)^{\perp}$ e dire se X e Y sono in somma diretta.
[$\vec{v}^{\perp} =< (0, 1, 0), (3, 0, -7) >$; $\left(\vec{v}^{\perp}\right)^{\perp} =< (0, 1, 0), (3, 0, 1) >$; non sono in somma diretta.] $\boxed{5}$

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ sia s la retta

$$s \; : \; \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases},$$

determinare:

(a) le equazioni cartesiane della retta di minima distanza tra s e l'asse x; [$2x + 5 = 0 = y + z$] $\boxed{4}$

(b) la minima distanza tra le due rette; [$\frac{3\sqrt{2}}{2}$] $\boxed{1}$

(c) un'equazione cartesiana per la superficie ottenuta per rotazione di s attorno all'asse x; [$2x^2 - y^2 - z^2 + 10x + 17 = 0$] $\boxed{4}$

Esercizio 4. Nel piano proiettivo complesso, sia $\mathscr{C}$ la conica data dalla seguente equazione:

$$\mathscr{C} \; : \; 2x^2 - y^2 + x + 2y = 0.$$

(a) Classificare la conica dal punto di vista proiettivo e affine. [Iperbole generale] $\boxed{2}$

(b) Determinare le coordinate del centro e le equazioni degli asintoti. [$C(-1/4, 1)$,assi: $x = -1/4, y = 1$] $\boxed{2}$

(c) Costruire un'equazione per il fascio $\mathscr{F}$ di coniche contenente $\mathscr{C}$ e avente come punti base $A(0; 2), B(1; -1), O(0; 0)$ con molteplicità due.
[$(x + 2y)(3x + y - 2) + k(2x^2 - y^2 + x + 2y) = 0$] $\boxed{2}$