Geometria I (completo)

Lunedì 25 gennaio 2016

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, sia $f : \mathbb{R}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ l'endomorfismo, definito al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \qquad f(x,y,z) = (\alpha x, y+z, z)$$

(a) Stabilire per quali valori di α la funzione f è un automorfismo. [$\alpha \neq 0$] $\boxed{2}$

(b) Al variare di α, scrivere le basi degli autospazi di f e stabilire in quali casi f è diagonalizzabile. [Per $\alpha = 1$, l'unico autovalore è 1 e il relativo autospazio è $< (1,0,0),(0,1,0) >$; per $\alpha \neq 1$ l'autospazio relativo all'autovalore 1 è $< (0,1,0) >$ e l'autospazio relativo all'autovalore α è $< (1,0,0) >$. In nessun caso l'endomorfismo è diagonalizzabile.] $\boxed{6}$

(c) Posto $\alpha = 0$, determinare una base per il nucleo e una per l'immagine di f. [$\mathrm{Im}\, f =< (0,1,0),(0,1,1) >$; $\quad \ker f =< (1,0,0) >$] $\boxed{2}$

(d) Posto $\alpha = 0$, stabilire se il sottospazio $Y =< (0,2,3),(0,0,1) >$ appartiene all'immagine di f e in tal caso determinare $f^{-1}(Y)$. [$Y = \mathrm{Im}\, f$; $f^{-1}(Y) = \mathbb{R}^3$] $\boxed{3}$

Esercizio 2. Nel piano affine euclideo sono date la conica $\mathcal{C} : x^2 - 4xy + 6y^2 - 4y = 0$ e la retta $r : x - 2y = 0$.

(a) Dopo aver riconosciuto la conica $\mathcal{C}$, scrivere l'equazione del fascio $\mathscr{F}$ di coniche tangenti a $\mathcal{C}$ nei punti in cui essa è intersecata dalla retta r. [Ellisse generale; fascio: $(1+k)x^2 - 4(1+k)xy + 2(3+2k)y^2 - 4y = 0$] $\boxed{4}$

(b) Dopo aver verificato che il fascio $\mathscr{F}$ può essere rappresentato dall'equazione:

$$(1+k)x^2 - 4(1+k)xy + 2(3+2k)y^2 - 4y = 0,\ k \in \mathbb{R}\ \cup\ x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$$

determinare le equazioni delle coniche degeneri di $\mathscr{F}$; fornire una rappresentazione grafica delle coniche degeneri e di $\mathcal{C}$. [Coniche degeneri: $(x-2y)^2 = 0$; $\quad y(y-2) = 0$] $\boxed{6}$

(c) Verificare che tutte le coniche non degeneri di $\mathscr{F}$ hanno lo stesso centro. [$C(2;1)$] $\boxed{2}$

(d) Determinare l'equazione della conica del fascio $\mathscr{F}$ avente la retta $a : x - y - 1 = 0$ come asse. [$x^2 - 4xy + y^2 + 6y = 0$] $\boxed{3}$

Esercizio 3. Siano $\alpha : hx + y + 2z - 4 = 0$ e $\beta : (h-1)y - 2z - 2 = 0$, con $h \in \mathbb{R}$, due piani dello spazio affine euclideo. Sia t la retta $2x + y - 1 = 0 = x - 2y + z$.

(a) Determinare le posizioni reciproche tra i piani α e β, al variare di h. [Incidenti per $h \neq 0$, paralleli per $h = 0$] $\boxed{3}$

(b) Posto $h = 1$, scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente la retta $r := \alpha \cap \beta$ e parallelo alla retta t. [$5x + 5y - z - 31 = 0$] $\boxed{4}$