

# Geometria I (completo)

25 giugno 2013

**Esercizio 1.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$  sono assegnati l'endomorfismo  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y + 3z + 10t, 3y - 3z, x + 4y + z + 2t, 2x - y + 11z)$$

e i sottospazi vettoriali:

$$V = \langle (2, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 0) \rangle \quad \text{e} \quad W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + kz + 2t = 0, y = 0\},$$

con  $k$  parametro reale.

- (a) Calcolare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di  $f$ . 2  
[dim Im  $f$  = 3, dim ker  $f$  = 1]
- (b) Determinare, se esistono, gli autovettori di  $f$  che appartengono al sottosp.  $V$ . 4  
[ $\{(2a, 0, 0, -a) \in \mathbb{R}^4 : a \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ ]
- (c) Stabilire, giustificando la risposta, se  $\mathbb{R}^4 = V + f(V)$ . 4  
[No, perchè ciascun sottospazio ha dimensione 2, ma la loro intersezione ha dimensione 1]
- (d) Determinare i valori di  $k$  per i quali  $f(V) \subseteq W$ . 3  
[ $k=-5$ ]

**Esercizio 2.** (a) Nel piano proiettivo determinare l'equazione della parabola  $\mathcal{P}$  avente asse parallelo alla retta bisettrice del primo e terzo quadrante, tangente in  $A(-1/2, -1/2)$  alla retta di equazione  $x + y + 1 = 0$  e passante per il punto  $B(1; -1)$ . 5

$$[x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y - 4 = 0]$$

- (b) Dopo aver verificato che l'equazione di tale parabola è  $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$ , determinare le coordinate del vertice. 2  
[ $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ ]

- (c) Sia  $P$  un punto generico del piano. Siano  $T$  e  $V$  i punti di contatto di  $\mathcal{P}$  con le tangenti uscenti da  $P$ . Scrivere l'equazione del luogo descritto dai punti  $P$  per i quali  $T$  e  $V$  sono allineati con l'origine. 5  
[ $x + y + 2 = 0$ ]

**Esercizio 3.** Nello spazio euclideo  $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$  siano:

$$a : \begin{cases} 3x + 5y = 5 \\ 2x + 5z = 10 \end{cases}, \quad b : \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

due rette. Determinare:

- (a) la posizione reciproca delle due rette e le coordinate dell'eventuale punto di intersezione;  $\boxed{4}$

[Sghembe]

- (b) un'equazione cartesiana per il fascio di piani ortogonali alla retta  $b$ .  $\boxed{3}$

[ $x + y + k = 0, k \in \mathbb{R}$ ]