Geometria I

25 settembre 2012

Esercizio 1. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$, siano π il piano di equazione $2x-y+2z=0$ ed r la retta individuata, al variare di $h \in \mathbb{R}$, dalle equazioni:

$$r \ : \ \begin{cases} x = ht \\ y = 2+t \\ z = 2-2ht. \end{cases},$$

(a) Studiare, al variare del parametro, le posizioni reciproche di π ed r.
[Paralleli per $h=-\frac{1}{2}$, incidenti in $\left(\frac{2h}{1+2h}, \frac{4+4h}{1+2h}, \frac{2}{1+2h}\right)$, altrimenti] $\boxed{4}$

(b) Determinare le equazioni della retta parallela al piano π, ortogonale all'asse y e passante peril punto $P(0;3;0)$. [$x+z=0=y-3$] $\boxed{3}$

(c) Scrivere le equazioni delle sfere di raggio $\sqrt{5}$ che intersecano il piano π lungo la circonferenza di centro $C(1;0;-1)$ e raggio 1.
[$\left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2=5, \quad \left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\left(z+\frac{7}{3}\right)^2=5$] $\boxed{5}$

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, munito del prodotto scalare canonico, sia $f \ : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo rappresentato, rispetto alle basi canoniche, dalla matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare una base per W=Ker$f$ e una base per Imf.
[$W =< (1,1,0,0),(0,1,1,0) >, \ \ \mathrm{Im}f =< (1,2,1),(1,3,2) >$] $\boxed{2}$

(b) Determinare una base ortonormale per W.
[$W =< \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right) >$] $\boxed{3}$

(c) Determinare una base per $W^\perp$. [$W^\perp =< (1,-1,1,0),(0,0,0,1) >$] $\boxed{2}$

(d) Dire se sussiste la relazione $R^4 = W \oplus W^\perp$.[Sì] $\boxed{2}$

Esercizio 3. Nel piano affine euclideo reale sia $\mathscr{F}$ il fascio di coniche passanti per i punti $O(0;0)$ e $A(-1;0)$ e tangenti in $B(-1;-1)$ alla retta b di equazione $b \ : \ x+y+2=0$.

(a) Determinare un'equazione per il fascio $\mathscr{F}$.
[$kx^2+(1-k)xy+y^2+kx+(2-k)y=0$] $\boxed{4}$

(b) Determinare e riconoscere le coniche del fascio rispetto alle quali le polari del punto $P(0;1)$ e del punto improprio della retta $x+y=0$ sono tra loro ortogonali.
[$\sqrt{5}x^2+(1-\sqrt{5})xy+y^2+\sqrt{5}x+(2-\sqrt{5})y=0$, ellisse; $-\sqrt{5}x^2+(1+\sqrt{5})xy+y^2-\sqrt{5}x+(2+\sqrt{5})y=0$, iperbole.] $\boxed{7}$