

# Geometria I (completo)

28 gennaio 2014

**Esercizio 1.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$  sono dati i seguenti sottospazi:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 = y\}, \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 = y + z\}$$

- (a) Determinare una base e la dimensione di  $U$  e di  $V$ . [ $U = \langle (0, 0, 1) \rangle, V = \langle (0, 1, -1) \rangle$ , quindi entrambi hanno dimensione 1.] 2
- (b) Stabilire se la somma  $U + V$  è diretta e se  $U$  è un complemento diretto per  $V$  in  $\mathbb{R}^3$ . [La somma è diretta perché l'intersezione tra i due sottospazi è  $\{\vec{0}\}$ , ma  $U$  non è complemento diretto di  $V$  perché  $U + V \neq \mathbb{R}^3$ .] 2

**Esercizio 2.** (a) Per quali valori reali di  $\alpha$  e  $\beta$  il seguente sistema ammette come soluzione  $x = 2, y = 0, z = -3$ ? 3

$$\begin{cases} \alpha(x - 2) + 2\beta y + z + 3 = 0 \\ \alpha x - \beta y - 2 = 0 \\ 3x - \beta z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$[\alpha = 1, \beta = -1]$$

- (b) Per gli stessi valori di  $\alpha$  e  $\beta$  il sistema ammette altre soluzioni? Quali? [ $\langle (1, -1, -3) \rangle + \langle (2, 0, -3) \rangle$ ] 5

**Esercizio 3.** Nel piano proiettivo complesso, sia  $\mathcal{C}$  il fascio di coniche:

$$\mathcal{C} : x^2 + 4y^2 + 2(k + 3)xy - 2x - 2(2k + 4)y = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Determinare:

- (a) le coniche degeneri del fascio, i punti base e il tipo di fascio; [Fascio di coniche tangenti; i punti base hanno coordinate:  $(0, 0), (2, 0), (2, -1)$ , le coniche degeneri sono rappresentate dalle equazioni:  $(x + 2y)(x + 2y - 2) = 0$  e  $y(x - 2) = 0$ .] 4
- (b) la classificazione affine delle coniche del fascio, al variare di  $k$ ; [parabole per  $k = -1, -5$ , ellissi per  $-5 < k < -1$  e iperboli negli altri casi.] 2
- (c) posto  $k = -2$  il centro della conica e le equazioni delle tangenti ad essa condotte dal punto  $P(4; -1)$ . [centro:  $(4/3, -1/3)$ , tangenti:  $y + 1 = 0, x + 2y - 2 = 0$ ] 5

