Geometria I (completo)

30 gennaio 2013

Esercizio 1. Siano $M_k \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ e $v_k \in \mathbb{R}^3$ la matrice e il vettore seguenti:

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k-1 & k-1 & 0 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Determinare:

(a) al variare di k, il rango della matrice M_k; $\boxed{2}$
[$k = 1$: $\mathrm{rg} M_k = 1$, $\quad k \neq 1$: $\mathrm{rg} M_k = 2$]

(b) al variare di k, la compatibilità del sistema $M_k \vec{x} = \vec{v_k}$ e il numero delle soluzioni; $\boxed{3}$
[$k = 1$: nessuna soluzione, $\quad k \neq 1$: compatibile, ∞^1 soluzioni]

(c) posto $k = 0$, l'insieme S_0 delle soluzioni; $\boxed{2}$
[$\{(a, -a, 1/2 - a) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a \in \mathbb{R}\}$]

(d) al variare di k, gli autovalori della matrice M_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche; stabilire per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile; $\boxed{10}$
[Se $k \neq 1, 3$, autovalori: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = k - 1$, per ciascuno di essi m.a.=m.g.=1;
se $k = 1$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ con m.a.=m.g.=2, $\lambda_2 = 2$ con m.a.=m.g.=1;
se $k = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ con m.a.=2 e m.g.=1, $\lambda_1 = 0$ con m.a.=m.g.=1;
matrice diagonalizzabile per $k \neq 3$]

(e) posto $k = 1$, diagonalizzare la matrice M_1 e indicare una matrice diagonalizzante. $\boxed{4}$

$$[D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}]$$

Esercizio 2. Nel piano proiettivo complesso, sia $\mathscr{C}$ il fascio di coniche:

$$\mathscr{C} \ : \ x^2 + 2(k-1)xy + ky^2 - (k-1)x = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Determinare le coniche degeneri e i punti di base; riconoscere il fascio. $\boxed{6}$
[Coniche degeneri: $x(x - 2y + 1) = 0$, $\ (x + iy)(x - iy) = 0$. Fascio di coniche tangenti in O con punti base: $\ (0, 0)$ con molteplicità 2, $\left(\frac{2i-1}{5}, \frac{2+i}{5}\right), \left(\frac{-2i-1}{5}, \frac{2-i}{5}\right)$]

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ siano:

$$r \;:\; \begin{cases} y - z = 3 \\ x = 0 \end{cases}, \qquad a \;:\; \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Determinare:

(a) la posizione della retta a rispetto alla retta r; $\boxed{1}$
[Sghembe]

(b) le equazioni parametriche della retta di minima distanza tra r ed a $\boxed{4}$
[$x = t \cap y = 1 \cap z - 2 = 0, \quad t \in \mathbb{R}$]

(c) un'equazione cartesiana del piano passante per il punto $X(1, 1, 1)$ e parallelo alle rette r ed a. $\boxed{2}$
[$x = 1$]