

*Articolo Apparso su: Boll. Unione Mat. Sez. A Mat.
Soc. Cult. (8) VI-A (2003) 327-329.*

Risultati di esistenza, molteplicità e perturbazione dalla simmetria per problemi ellittici quasilineari associati a funzionali non regolari

Marco Squassina

Sia Ω un dominio limitato di \mathbf{R}^n ($n \geq 2$) e $f : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ un funzionale della forma

$$f(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_{x_i} u D_{x_j} u \, dx - \int_{\Omega} G(x, u) \, dx.$$

A partire dal celebre lavoro di Ambrosetti–Rabinowitz [1], la teoria dei punti critici è stata applicata con successo al funzionale f , producendo diversi risultati notevoli. D'altra parte, l'ipotesi che $f : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ sia di classe C^1 risulta essere molto restrittiva per funzionali più generali del calcolo delle variazioni, come

$$f(u) = \int_{\Omega} L(x, u, \nabla u) \, dx - \int_{\Omega} G(x, u) \, dx.$$

In particolare, se f ha la forma

$$f(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u) D_{x_i} u D_{x_j} u \, dx - \int_{\Omega} G(x, u) \, dx,$$

ci possiamo aspettare che f sia di classe C^1 solamente quando gli a_{ij} non dipendono da u . D'altronde, a partire da alcuni lavori di Chang e Marino–Scolozzi, le tecniche di punto critico sono state estese a certe classi di funzionali non regolari. Nel nostro contesto, in cui f è in modo naturale continuo ma non localmente Lipschitziano, risulta conveniente applicare la teoria sviluppata da Degiovanni, Marzocchi, Ioffe, Katriel, Schwartzman (si veda [2] e i riferimenti inclusi).

Osserviamo che un differente approccio è presente in letteratura, sviluppato in alcuni lavori di Struwe ed Arcoya–Boccardo. Se consideriamo lo spazio $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ dotato della famiglia di norme

$$\|u\|_\varepsilon := \|u\|_{H_0^1} + \varepsilon \|u\|_{L^\infty}, \quad \varepsilon > 0,$$

allora, sotto opportune ipotesi, f è di classe C^1 in $(H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\varepsilon)$ per ogni $\varepsilon > 0$. Questo consente un procedura di approssimazione con problemi regolari (il problema originale è ottenuto come limite per $\varepsilon \rightarrow 0$). D'altra parte, in vista di risultati di molteplicità, sembra difficile conservare

la molteplicità delle soluzioni al limite. In particolare, quando f è pari e soddisfa ipotesi tipo Ambrosetti–Rabinowitz, l'esistenza di infinite soluzioni è stata ottenuta solo con la prima tecnica.

Lo scopo di questa tesi è quello di estendere alcuni risultati di esistenza, nonesistenza, molteplicità e perturbazione dalla simmetria per problemi ellittici quasilineari del tipo

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n D_{x_j}(a_{ij}(x,u)D_{x_i}u) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n D_s a_{ij}(x,u)D_{x_i}uD_{x_j}u = g(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

ed anche per classi più generali di problemi ellittici

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla_{\xi}L(x,u,\nabla u)) + D_sL(x,u,\nabla u) = g(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

incluso il caso in cui g raggiunge la crescita critica rispetto all'immersione di Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{np/(n-p)}(\Omega)$ dove $1 < p < n$.

Nella tesi, sono stati ottenuti nuovi risultati per i precedenti problemi nelle seguenti situazioni:

I) molteplicità di soluzioni per sistemi ellittici quasilineari quadratici nel gradiente; esistenza di soluzioni deboli per una classe generale di equazioni di Eulero di funzionali del Calcolo delle Variazioni (si veda per esempio [6]).

II) molteplicità di soluzioni per sistemi ellittici quasilineari quadratici nel gradiente con simmetria pari perturbata ($g(x,-s) \neq -g(x,s)$); molteplicità di soluzioni per equazioni ellittiche quasilineari alla crescita esponenziale con simmetria perturbata; sistemi ellittici semilineari con simmetria pari perturbata e condizioni al bordo non omogenee (doppia rottura di simmetria) (si veda per esempio [4, 8]).

III) problemi di tipo jumping per equazioni di Eulero di funzionali del Calcolo delle Variazioni; problemi di tipo jumping per una classe generale di disequazioni variazionali (si veda per esempio [3]).

IV) esistenza di soluzioni intere positive per equazioni quasilineari; esistenza di due soluzioni deboli per equazioni alla crescita critica con addendo sottocritico; risultati di approssimazione di soluzioni di problemi alla crescita quasicritica (si veda per esempio [5, 7]).

V) identità di Pucci–Serrin per soluzioni di classe C^1 .

BIBLIOGRAFIA

- [1] AMBROSETTI A., RABINOWITZ P.H., *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349–381.
- [2] CANINO A., DEGIOVANNI M., *Nonsmooth critical point theory and quasilinear elliptic equations*, Topological Methods in Differential Equations and Inclusions, Montreal 1994, (1995), 1–50.
- [3] GROLI A., SQUASSINA M., *Jumping problems for fully nonlinear elliptic variational inequalities*, J. Convex Anal. **8** (2001), 471–488.

- [4] PALEARI S., SQUASSINA M., *Multiplicity results for perturbed symmetric quasilinear elliptic systems*, Differential Integral Equations **14** (2001), 785–800.
- [5] SQUASSINA M., *Existence of positive entire solutions for nonlinear elliptic problems*, Topol. Meth. Nonlinear Anal. **17** (2001), 23–39.
- [6] SQUASSINA M., *Existence of weak solutions to general Euler's equations via nonsmooth critical point theory*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **9** (2000), 113–131.
- [7] SQUASSINA M., *Two solutions for inhomogeneous fully nonlinear elliptic equations at critical growth*, NoDEA, Nonlinear Differential Equations Appl. (2002), in press.
- [8] SQUASSINA M., TARSI C., *Multiple solutions for a class of quasilinear elliptic problems in \mathbf{R}^2 with exponential growth*, Manuscripta Math. **106** (2001), 315–337.

Dipartimento di Matematica, Università Cattolica del Sacro Cuore

e-mail: m.squassina@dmf.unicatt.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo XIII

Direttore di ricerca: Prof. M. Degiovanni, Università Cattolica del Sacro Cuore.