UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

ESERCIZI

di

APPROFONDIMENTI DI ALGEBRA

M. Chiara Tamburini

Anno Accademico 2013/2014

Indice

Esercizi I

Moduli su un anello

1.1 Sia M uno dei seguenti gruppi additivi: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_{12}$.
In ciascun caso, per ogni $m \in M$, si determinino il periodo di m e il sottogruppo $< m >= \mathbb{Z}m$ generato da m.

Osservazione Considerando un gruppo abeliano M come $\mathbb{Z}$-modulo, il periodo di un suo elemento m coincide con il generatore ≥ 0 del suo annullatore.

Svolgimento

• In $\mathbb{Z}$ lo 0 ha periodo 1, tutti gli altri elementi hanno periodo 0.

$< 0 >= \{0\}, \quad < 1 >=< -1 >= \mathbb{Z}, \quad < 2 >=< -2 >= \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, ecc....

• In $\mathbb{Z}_5$: $[0]_5$ ha periodo 1, tutti gli altri elementi hanno periodo 5.

$\langle [0]_5 \rangle = \{[0]_5\}, \qquad \langle [1]_5 \rangle = \langle [2]_5 \rangle = \langle [3]_5 \rangle = \langle [4]_5 \rangle = \mathbb{Z}_5,$

• In $\mathbb{Z}_8$: $[0]_8$ ha periodo 1;

$[1]_8$, $[3]_8$, $[5]_8$, $[7]_8$, hanno periodo 8;

$[2]_8$, $[6]_8$, hanno periodo 4;

$[4]_8$ ha periodo 2.

$\langle [0]_8 \rangle = \{[0]_8\}, \qquad \langle [1]_8 \rangle = \langle [3]_5 \rangle = \langle [5]_5 \rangle = \langle [7]_5 \rangle = \mathbb{Z}_8,$

$\langle [2]_8 \rangle = \langle [6]_8 \rangle = \{[0]_8, [2]_8, [4]_8, [6]_8\}, \qquad \langle [4]_8 \rangle = \{[0]_8, [4]_8\}.$

• In $\mathbb{Z}_{12}$: $[0]_{12}$ ha periodo 1;

$[1]_{12}$, $[5]_{12}$, $[7]_{12}$, $[11]_{12}$, hanno periodo 12. Ciascuno di essi genera $\mathbb{Z}_{12}$.

$[2]_{12}$, $[10]_{12}$ hanno periodo 6. Ciascuno di essi genera $\{[2k]_{12} \mid 0 \leq k \leq 5\}$.

$[3]_{12}$, $[9]_{12}$ hanno periodo 4. Ciascuno di essi genera $\{[3k]_{12} \mid 0 \leq k \leq 3\}$.

$[4]_{12}$, $[8]_{12}$ hanno periodo 3. Ciascuno di essi genera $\{[0]_{12}, [4]_{12}, [8]_{12}\}$.

$[6]_{12}$ ha periodo 2 e genera $\{[0]_{12}, [6]_{12}\}$.

1. 2 Nel modulo ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$, si considerino i sottoinsiemi

$$S = \{4\},\ T = \{12, 20\}.$$

Si dimostri che $\langle S \rangle = \langle T \rangle$. Si dica inoltre se S è indipendente e se genera $\mathbb{Z}$.

Svolgimento

$\langle S \rangle := \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $\qquad \langle T \rangle := \{12k + 20h \mid k, h \in \mathbb{Z}\}$.

$12 = 4 \cdot 3$, $20 = 4 \cdot 5$. Ne segue $T \subseteq \langle S \rangle$, da cui $\langle T \rangle \leq \langle S \rangle$.
$4 = 12(2) + 20(-1)$. Ne segue $S \subseteq \langle T \rangle$, da cui $\langle S \rangle \leq \langle T \rangle$.

Per $k \in \mathbb{Z}$ si ha $k4 = 0$ solo se $k = 0$. Quindi $\{S\}$ è indipendente. Non genera $\mathbb{Z}$ perchè 1 non è multiplo di 4.

1.3 Nello spazio vettoriale ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}$, si considerino i sottoinsiemi

$$S = \{4\},\ T = \{\frac{1}{3}, \frac{5}{7}\}.$$

Per ciascuno di essi si dica se è indipendente e se genera $\mathbb{Q}$ come $\mathbb{Q}$-modulo.

Svolgimento

Per $\lambda \in \mathbb{Q}$ si ha $\lambda 4 = 0$ solo se $\lambda = 0$. Quindi $\{S\}$ è indipendente.
S genera $\mathbb{Q}$ perchè $q \in \mathbb{Q}$ si scrive nella forma $q = \frac{q}{4}4$.

$15\frac{1}{3} - 7\frac{5}{7} = 0$. Quindi T è dipendente su $\mathbb{Q}$.
$\frac{1}{3}$ genera $\mathbb{Q}$ come $\mathbb{Q}$-modulo perchè $q = 3\frac{q}{3}$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$.
A maggior ragione T genera $\mathbb{Q}$.

1.4 Si consideri il gruppo abeliano $\mathbb{Q}$ come $\mathbb{Z}$-modulo. Per ciascuno degli insiemi

$$S = \{4\}, \quad T = \{\frac{1}{3}, \frac{5}{7}\}$$

si dica se è indipendente e se genera $\mathbb{Q}$ come $\mathbb{Z}$-modulo.
Si dimostri che il sottomodulo $\langle T \rangle$ generato da T é 1-generato, ossia é un gruppo ciclico.

Svolgimento

Per $k \in \mathbb{Z}$ si ha $k4 = 0$ solo se $k = 0$. Quindi $\{S\}$ è indipendente.
$\{S\}$ non genera $\mathbb{Q}$ come $\mathbb{Z}$-modulo perchè, ad esempio, $1 \notin \langle 4 \rangle$.
Infatti non esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $1 = 4k$.

$15\frac{1}{3} - 7\frac{5}{7} = 0$. Quindi T è dipendente su $\mathbb{Z}$.

$\langle T \rangle = \left\{ \frac{7a+15b}{21} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} \leq \left\langle \frac{1}{21} \right\rangle$. D'altra parte $-2\frac{1}{3} + \frac{5}{7} = \frac{1}{21} \in \langle T \rangle$.
Quindi $\left\langle \frac{1}{21} \right\rangle \leq \langle T \rangle$. Si conclude $\left\langle \frac{1}{21} \right\rangle = \langle T \rangle$.

$\{T\}$ non genera $\mathbb{Q}$ come $\mathbb{Z}$-modulo. Infatti, ad esempio, $\frac{1}{2} \notin \langle T \rangle$. Perché ?

1.5 Si consideri il gruppo additivo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali come $\mathbb{Z}$-modulo.
Si dimostri che:

i) il sottoinsieme $\left\{ \frac{2}{9},\ \frac{1}{4} \right\}$ è dipendente;

ii) il sottomodulo $L := \left\langle \frac{1}{3},\ \frac{2}{5} \right\rangle$ è libero di rango 1;

iii) $\frac{1}{3} \notin \left\langle \frac{2}{7},\ \frac{1}{2} \right\rangle$;

Svolgimento

i) $-9\frac{2}{9} + 8\frac{1}{4} = 0$.

ii) $L = \left\{ a\frac{1}{3} + b\frac{2}{5} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{5a+6b}{15} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} \leq \mathbb{Z}\frac{1}{15} = \left\langle \frac{1}{15} \right\rangle$.
Da

$$\frac{1}{15} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$$

segue $\frac{1}{15} \in L$, da cui $\left\langle \frac{1}{15} \right\rangle \leq L$. Si conclude $L = \left\langle \frac{1}{15} \right\rangle = \mathbb{Z}\frac{1}{15}$.
Chiaramente $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{15} \right\}$ è una $\mathbb{Z}$-base di L, che è quindi libero di rango 1.

iii) Gli elementi del sottomodulo

$$\left\langle \frac{2}{7},\ \frac{1}{2} \right\rangle = \mathbb{Z}\frac{2}{7} + \mathbb{Z}\frac{1}{2}$$

sono della forma $a\frac{2}{7} + b\frac{1}{2} = \frac{4a+7b}{14}$, con a, b interi. Se $\frac{1}{3}$ appartenesse a tale sottomodulo, dovrebbero esistere due interi $\overline{a}$, $\overline{b}$ tali che $\frac{1}{3} = \frac{4\overline{a}+7\overline{b}}{14}$. Ne seguirebbe $14 = 3(4\overline{a} + 7\overline{b})$, contraddizione perchè 3 non divide 14.

1.6 Si consideri il gruppo abeliano $\mathbb{Q}$ come $\mathbb{Z}$-modulo. Si dimostri che non è finitamente generato.

Svolgimento

Per assurdo supponiamo che $S = \left\{\frac{m_1}{n_1}, \ \cdots, \ \frac{m_k}{n_k}\right\}$ sia un insieme finito di generatori di $\mathbb{Q}$, come $\mathbb{Z}$-modulo, ossia:

$$\mathbb{Q} = \langle S \rangle = \mathbb{Z}\frac{m_1}{n_1} + \ \cdots + \ \mathbb{Z}\frac{m_k}{n_k}.$$

Posto $n =$ m.c.m. $(n_1, \cdots, n_k)$, ogni elemento di $\langle S \rangle$ è della forma $\frac{z}{n}$ per un opportuno $z \in \mathbb{Z}$. Detto p un primo che non divide n, il numero $\frac{1}{p}$ non può essere scritto in questa forma. Si ha così la contraddizione $\frac{1}{p} \notin \mathbb{Q}$.

1.7 Siano M, M' due R-moduli e $\Phi : M \to M'$ un R-omomorfismo. Si provi che Φ è iniettiva, come applicazione, se e solo se $\operatorname{Ker}\Phi = \{0_M\}$.

Svolgimento

Se l'applicazione Φ è iniettiva, ogni elemento di M' ha al massimo una preimmagine in M. Poichè $\Phi(0_M) = 0_{M'}$, si ha che 0_M è l'unica preimmagine di $0_{M'}$, ossia l'unico elemento di $\operatorname{Ker}\Phi$.
Viceversa sia $\operatorname{Ker}\Phi = \{0_M\}$. Supponiamo che m_1, m_2 siano elementi di M tali che $\Phi(m_1) = \Phi(m_2)$. Ne segue: $\Phi(m_1) - \Phi(m_2) = 0_{M'}$, $\Phi(m_1 - m_2) = 0_{M'}$, $m_1 - m_2 \in \operatorname{Ker}\Phi$, $m_1 - m_2 = 0_M$, $m_1 = m_2$.

1.8 Siano M, M', M'' degli R-moduli e $\Phi : M \to M'$, $\Psi : M' \to M''$ degli R-omomorfismo. Si provi che il prodotto $\Psi\Phi : M \to M''$ è un R-omomorfismo.

Svolgimento

Per ogni $m, m_1, m_2 \in M$ e per ogni $r \in R$ si ha:

- $\Psi\Phi\,(m_1 + m_2) = \Psi\,(\Phi\,(m_1 + m_2)) = \Psi\,(\Phi\,(m_1) + \Phi\,(m_2)) =$
$\Psi\,(\Phi\,(m_1)) + \Psi\,(\Phi\,(m_2)) = \Psi\Phi\,(m_1) + \Psi\Phi\,(m_2)$;
- $\Psi\Phi(rm) = \Psi\,(\Phi(rm)) = \Psi\,(r\,\Phi(m)) = r\,\Psi\,(\Phi(m)) = r\,\Psi\Phi(m)$.

1.9 Siano M, M' due R-moduli e $\Phi : M \to M'$ un R-isomorfismo.
Si provi che $\Phi^{-1} : M' \to M$ è un R-isomorfismo.

Svolgimento

- Per ogni $m_1', m_2' \in M'$, dette m_1, m_2 le rispettive preimmagini in M, si ha:

$\Phi(m_1 + m_2) = \Phi(m_1) + \Phi(m_2) = m_1' + m_2'$,
$m_1 + m_2 = \Phi^{-1}\,(m_1' + m_2')$,
$\Phi^{-1}(m_1') + \Phi^{-1}(m_2') = \Phi^{-1}\,(m_1' + m_2')$

• Per ogni $r \in R$, $m' \in M'$, detta m la preimmagine di m' in M si ha:
$\Phi(rm) = r\,\Phi(m) = r\,m'$,
$rm = \Phi^{-1}(r\,m')$,
$r\,\Phi^{-1}(m') = \Phi^{-1}(rm')$.

1.10 Nel modulo ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ si calcolino i seguenti sottomoduli:

$$3\mathbb{Z}+6\mathbb{Z}, \quad 3\mathbb{Z}+5\mathbb{Z}, \quad 4\mathbb{Z}+6\mathbb{Z}, \quad 3\mathbb{Z}\cap 6\mathbb{Z}, \quad 3\mathbb{Z}\cap 5\mathbb{Z}, \quad 4\mathbb{Z}\cap 6\mathbb{Z}.$$

Svolgimento

• $6\mathbb{Z} \leq 3\mathbb{Z}$. Quindi $3\mathbb{Z}+6\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$.

• $1 = 6-5 \in 3\mathbb{Z}+5\mathbb{Z}$. Quindi $\langle 1\rangle \leq 3\mathbb{Z}+5\mathbb{Z}$. Da $\langle 1\rangle = \mathbb{Z}$ segue $3\mathbb{Z}+5\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

• $2 = -4+6 \in 4\mathbb{Z}+6\mathbb{Z}$. Quindi $\langle 2\rangle = 2\mathbb{Z} \leq 4\mathbb{Z}+6\mathbb{Z}$. D'altra parte

$$4\mathbb{Z}+6\mathbb{Z} = \{4a+6b \mid a,b\in\mathbb{Z}\} = \{2(2a+3b) \mid a,b\in\mathbb{Z}\} \leq 2\mathbb{Z}.$$

Si conclude $4\mathbb{Z}+6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$.

• $6\mathbb{Z} \leq 3\mathbb{Z}$. Quindi $3\mathbb{Z}\cap 6\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$.

• $15\mathbb{Z} \leq 3\mathbb{Z}\cap 5\mathbb{Z}$. Mostriamo che $3\mathbb{Z}\cap 5\mathbb{Z} \leq 15\mathbb{Z}$. A tale scopo sia $a \in 3\mathbb{Z}\cap 5\mathbb{Z}$. Ne segue che 3 e 5 dividono a. Pertanto anche $15 = \mathrm{mcm}(3,5)$ divide a. Si conclude $3\mathbb{Z}\cap 5\mathbb{Z} = 15\mathbb{Z}$.

• $12\mathbb{Z} \leq 4\mathbb{Z}\cap 6\mathbb{Z}$. Mostriamo che $4\mathbb{Z}\cap 6\mathbb{Z} \leq 12\mathbb{Z}$. A tale scopo sia $a \in 4\mathbb{Z}\cap 6\mathbb{Z}$. Ne segue che 4 e 6 dividono a. Pertanto anche $12 = \mathrm{mcm}(4,6)$ divide a. Si conclude $4\mathbb{Z}\cap 6\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$.

1.11 Sia $S = \{s_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ s_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$.
• Considerando $\mathbb{R}^2$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, si dica se S è una base.
• Considerando $\mathbb{R}^2$ come $\mathbb{Z}$-modulo, si dica se S genera $\mathbb{R}^2$ e se è indipendente.
• Si dica se S genera $\mathbb{Z}^2$ come $\mathbb{Z}$-modulo.

Svolgimento

• Verifichiamo che S è una base di $\mathbb{R}^2$ su $\mathbb{R}$ mostrando che per ogni vettore $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ esistono e sono unici $x, y \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Equivalentemente che il sistema

$$\begin{cases} 3x+2y=a \\ 2x+3y=b \end{cases}$$

ha un'unica soluzione. Portandolo in forma a gradini:

$$\begin{cases} x+\frac{2}{3}y=\frac{a}{3} \\ x+\frac{3}{2}y=\frac{b}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x & + & \frac{2}{3}y & = & \frac{a}{3} \\ & & \frac{-5}{6}y & = & \frac{2a-3b}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{3a-2b}{5} \\ y=\frac{-2a+3b}{5} \end{cases}$$

• S non genera $\mathbb{R}^2$ come $\mathbb{Z}$-modulo perchè xs_1+ys_2 ha coordinate intere per ogni $x,y\in\mathbb{Z}$. S è indipendente su $\mathbb{Z}$ perchè, per $a=b=0$, il precedente sistema ha solo la soluzione $x=y=0$.

• S non genera $\mathbb{Z}^2$ come $\mathbb{Z}$-modulo. Infatti il vettore e_1, ad esempio, si ottiene come combinazione lineare di elementi di S solo per i coefficienti $x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{-2}{5}$, che non sono interi.

1.12 Sia M un gruppo abeliano finito. Si dimostri che M è libero, come $\mathbb{Z}$-modulo, se e solo se è nullo.

Svolgimento

Se $M=\{0_M\}$ allora è libero, con base $\emptyset$. Sia ora $M\neq\{0_M\}$ e supponiamo, per assurdo, che ammetta una base $\mathcal{B}$, necessariamente $\neq\emptyset$. Detto m un elemento di $\mathcal{B}$, l'applicazione $\mathbb{Z}\to M$ tale che $z\mapsto zm$ è iniettiva, essendo $\{m\}$ indipendente. Si conclude $\infty=|\mathbb{Z}|\leq|M|$, contraddizione.

1.13 Si dica se $\mathbb{Z}_5$ è libero come $\mathbb{Z}_5$-modulo e se è libero come $\mathbb{Z}$-modulo.

Svolgimento

$\mathbb{Z}_5$ è libero come $\mathbb{Z}_5$-modulo, avendo base $\{[1]_5\}$. Non è libero come $\mathbb{Z}$-modulo per l'esercizio precedente.

1.14 Sia R un anello commutativo. Considerando R^2 come R-modulo, si dimostri che non può essere generato da un unico elemento.

Svolgimento

Supponiamo, per assurdo, che R^2 sia generato da $v:=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Dovrebbero esistere $a_1,a_2\in R$ tali che $e_1=a_1v$, $e_2=a_2v$, ossia:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c} a_1v & a_2v \end{array}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

contraddizione percè le due matrici a sinistra non hanno inversa.

1.15 Si consideri il gruppo additivo $\mathbb{R}^2$ rispettivamente come $\mathbb{Z}$-modulo, come $\mathbb{R}$-modulo e come $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$-modulo. In ciascun caso si descrivano il sottomodulo $\langle e_1 \rangle$ e il sottomodulo $\langle e_1, e_2 \rangle$, dove

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento

• Considerando $\mathbb{R}^2$ come $\mathbb{Z}$-modulo:

$$\langle e_1 \rangle := \mathbb{Z}e_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \langle e_1, e_2 \rangle = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Si noti che, ad esempio, $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \notin \langle e_1, e_2 \rangle$.

• Considerando $\mathbb{R}^2$ come $\mathbb{R}$-modulo:

$$\langle e_1 \rangle := \mathbb{R}e_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \quad \langle e_1, e_2 \rangle = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2.$$

• Considerando $\mathbb{R}^2$ come $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$-modulo:

$$\langle e_1 \rangle := \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})\mathrm{e}_1 = \mathbb{R}^2.$$

Infatti, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Da $\langle e_1 \rangle \leq \langle e_1, e_2 \rangle = \mathbb{R}^2$ segue, a maggior ragione, $\langle e_1, e_2 \rangle = \mathbb{R}^2$.

1.16 Sia M un R-modulo finitamente generato. Si dimostri che, per ogni sottomodulo N di M, il modulo quoziente $\frac{M}{N}$ è finitamente generato.

Svolgimento

Sia $S = \{m_1, \cdots, m_k\}$ un insieme di generatori di M, come R-modulo. Dimostriamo che

$$\{N + m_1, \cdots, N + m_k\}$$

è un insieme di generatori di $\frac{M}{N}$, come R-modulo.

Infatti, per ogni elemento $N + m$ di $\frac{M}{N}$ si ha $m \in M$, quindi

$$m = \sum_{i=1}^{k} r_i mi$$

per opportuni $r_i \in R$ (non necessariamente unici!). Ne segue

$$N + m = N + \sum_{i=1}^{k} r_i mi = \sum_{i=1}^{k} r_i(N + m_i).$$

1.17 Siano M un R-modulo. Si dimostri che $M \oplus M$ è finitamente generato se e solo se M è finitamente generato.

Svolgimento

Sia M finitamente generato e sia $S = \{m_1, \cdots, m_k\}$ un insieme finito di generatori di M, come R-modulo.

Ne segue che

$$\left\{ \begin{pmatrix} m_1 \\ 0_M \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_k \\ 0_M \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_M \\ m_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0_M \\ m_k \end{pmatrix} \right\}$$

genera $M \oplus M$. Infatti:

$$\begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k} r_i mi \\ \sum_{i=1}^{k} s_i mi \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} r_i \begin{pmatrix} m_i \\ 0_M \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{k} s_i \begin{pmatrix} 0_M \\ m_i \end{pmatrix}.$$

Si conclude che $M \oplus M$ è finitamente generato.

Viceversa, $M \oplus M$ sia finitamente generato. Considerando la proiezione (sulla prima componente) $\pi_1 : M \oplus M \to M$ si ha

$$\frac{M \oplus M}{\text{Ker } \pi_1} \simeq M.$$

Per l'esercizio precedente si conclude che M è f.g.

1.18

Considerando $\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^2-1 \rangle}$ come $\mathbb{C}[x]$- modulo, si trovi un elemento che lo genera.

Svolgimento

$\left\langle x^2 - 1 \right\rangle + 1$ genera $\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^2-1 \rangle}$ come $\mathbb{C}[x]$- modulo. Infatti:

$$\left\langle x^2 - 1 \right\rangle + f(x) = f(x) \left(\left\langle x^2 - 1 \right\rangle + 1 \right).$$

1.19 Considerando $\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^2-1 \rangle}$ come $\mathbb{C}$- modulo, se ne trovi una base.

Svolgimento

Una base per $\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^2-1 \rangle}$ su $\mathbb{C}$ è $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$, dove

$$v_1 := \left\langle x^2 - 1 \right\rangle + 1, \quad v_2 := \left\langle x^2 - 1 \right\rangle + x.$$

Infatti:

• Per $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$ se e solo se

$$\langle x^2 - 1 \rangle + \alpha + \beta x = \langle x^2 - 1 \rangle + 0$$

se e solo se

$$\alpha + \beta x = (x^2 - 1)q(x)$$

se e solo se $q(x) = 0$, cioè $\alpha = \beta = 0$.

• Per ogni $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, eseguendo la divisione per $x^2 - 1$ si ha

$$f(x) = (x^2 - 1)q(x) + \alpha + \beta x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Ne segue:

$$\langle x^2 - 1 \rangle + f(x) = \langle x^2 - 1 \rangle + \alpha + \beta x = \alpha v_1 + \beta v_2.$$

1.20

Considerando $\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^3 - 1 \rangle}$ come $\mathbb{C}[x]$- modulo, si trovi un elemento che lo genera.

Svolgimento

$\langle x^3 - 1 \rangle + 1$ genera $\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^3 - 1 \rangle}$ come $\mathbb{C}[x]$- modulo. Infatti:

$$\langle x^3 - 1 \rangle + f(x) = f(x) \left(\langle x^3 - 1 \rangle + 1 \right).$$

1. 21 Considerando $\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^3 - 1 \rangle}$ come $\mathbb{C}$- modulo, se ne trovi una base.

Svolgimento

Una base per $\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^3 - 1 \rangle}$ su $\mathbb{C}$è $\mathcal{B} = \{v_1, \ v_2, \ v_3\}$, dove

$$v_1 := \langle x^3 - 1 \rangle + 1, \quad v_2 := \langle x^3 - 1 \rangle + x, \quad v_3 := \langle x^3 - 1 \rangle + x^2.$$

Infatti:

• Per $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ se e solo se

$$\langle x^3 - 1 \rangle + \alpha + \beta x + \gamma x^2 = \langle x^3 - 1 \rangle + 0$$

se e solo se

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = (x^3 - 1)q(x)$$

se e solo se $q(x) = 0$, cioè $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

• Per ogni $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, eseguendo la divisione per $x^3 - 1$ si ha

$$f(x) = (x^3 - 1)q(x) + \alpha + \beta x + \gamma x^2, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

Ne segue:

$$\langle x^3 - 1 \rangle + f(x) = \langle x^3 - 1 \rangle + \alpha + \beta x + \gamma x^2 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3.$$

1.22 Si dimostri che $\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{\langle x^3 - 1 \rangle}$ ha ordine 27.

Svolgimento

Ogni elemento di $\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{\langle x^3 - 1 \rangle}$ si scrive in modo unico nella forma:

$$\langle x^3 - 1 \rangle + \alpha + \beta x + \gamma x^2, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_3.$$

Ne segue che $\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{\langle x^3 - 1 \rangle}$ ha ordine $3 \times 3 \times 3 = 27$.

1.23 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$. Si dimostri che una applicazione lineare $f : V \to V$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

Svolgimento

La dimostrazione è basata sulla formula:

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker}\ f).$$

Se f è iniettiva, si ha $\operatorname{Ker}\ f = \{0_V\}$, $\dim(\operatorname{Ker}\ f) = 0$. Ne segue $\dim(\operatorname{Im} f) = n = \dim(V)$. Poichè $\mathbb{K}$ è un campo, $\operatorname{Im} f = V$.
Viceversa, se f è suriettiva, si ha $\operatorname{Im} f = V$, $\dim(\operatorname{Im} f) = n$. Ne segue $\dim(\operatorname{Ker}\ f) = 0$, $\operatorname{Ker}\ f = \{0_V\}$, f iniettiva.

1.24 Si dia un esempio di applicazione lineare di uno spazio vettoriale V in sè stesso, iniettiva non suriettiva.

Svolgimento

Sia $V := \mathbb{K}[x]$, considerato come spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. L' applicazione lineare $\mu_x : V \to V$, tale che $f(x) \mapsto xf(x)$ è iniettiva (perchè $\mathbb{K}[x]$ è privo di divisori dello zero), ma non è suriettiva. Infatti Im $\mu_x = x\mathbb{K}[x]$.

1. 25 Sia $m \in M$, gruppo abeliano additivo. Sia $o(m) = n \geq 0$, dove $o(m)$ indica il periodo di m. Si dimostri che, per ogni intero non nullo k, si ha:

$$o(km) = \frac{n}{\operatorname{MCD}(k, n)}.$$

In particolare

$$o(km) = n \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{MCD}(k, n) = 1.$$

Svolgimento

Lasciamo al lettore la verifica del caso $n = 0$. Sia quindi $n > 0$.

Poniamo $d := \mathrm{MCD}(k, n)$. Se $d = 0$, allora $k = 0$ e l'asserto è ovvio. Altrimenti possiamo supporre $d > 0$. Scriviamo $n = d\overline{n}$, $k = d\overline{k}$. Abbiamo:

$$\overline{n}\,(km) = (\overline{n}d\overline{k})m = \overline{k}(nm) = k0_M = 0_M.$$

Indicando con t il periodo di km, ne segue che t divide $\overline{n}$. D'altra parte, da

$$0_M = t(km) = (tk)m$$

segue che n divide kt, quindi $\overline{n}$ divide $\overline{k}t$. Siccome $\overline{n}$ e $\overline{k}$ sono coprimi, si ottiene che $\overline{n}$ divide t. Si conclude $t = \overline{n}$.

1. 26 Siano M un R-modulo e $f : M \to M$ un R-omomorfismo.

• Si dimostri che $\mathrm{Im}\ f^2 \leq \mathrm{Im}\ f$ e $\mathrm{Ker}\ f \leq \mathrm{Ker}\ f^2$.

• Si dia un esempio di M e f per i quali le precedenti inclusioni sono proprie.

Esercizi II

Omomorfismi fra moduli liberi

2.1 Si verifichi che ogni $v \in \mathbb{R}^2$ coincide con il proprio vettore coordinate rispetto alla base canonica. Idem per $w \in \mathbb{R}^3$.

Svolgimento

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.2 Si trovi la matrice Q di passaggio dalla base canonica di $\mathbb{R}^2$ alla base

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Svolgimento

Le colonne di Q sono i vettori coordinate degli elementi di $\mathcal{C}$ rispetto alla base canonica. Quindi $Q = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

2.3 Si considerino le seguenti basi di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

1) Si scriva la matrice Q di passaggio da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$;

2) si determini $v \in \mathbb{R}^2$ sapendo che $v_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

3) si verifichi che $Q^{-1} v_{\mathcal{C}} = v_{\mathcal{C}'}$.

Svolgimento

1) Siano Q_1 e Q_2 le matrici di passaggio dalla base canonica a $\mathcal{C}$ e a $\mathcal{C}'$ rispettivamente. Risulta:

$$Q_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad Q_2 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Per ogni $u \in \mathbb{R}^2$, tenendo presente che u concide con il proprio vettore coordinate rispetto alla base canonica, si ha allora:

$$u = Q_2 u_{\mathcal{C}'} = Q_1 u_{\mathcal{C}}.$$

Ne segue

$$\left(Q_1^{-1} Q_2\right) u_{\mathcal{C}'} = v_{\mathcal{C}}, \ \forall \ u \in \mathbb{R}^2.$$

Pertanto la matrice di passaggio da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ è

$$Q_1^{-1} Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-7}{2} \end{pmatrix} = Q.$$

2) Se $v_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, allora $v = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$.

3) $Q^{-1} v_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x + 12y \\ -x - 2y \end{pmatrix}$.
Da:

$$(7x + 12y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-x - 2y) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix} = v,$$

concludiamo che $Q^{-1} v_{\mathcal{C}} = v_{\mathcal{C}'}$.

2.4 Si considerino le seguenti basi di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

1) Si scriva la matrice P di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$;

2) si determini $v \in \mathbb{R}^3$ sapendo che $v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

3) si verifichi che $P^{-1} v_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{B}'}$.

Svolgimento

Siano P_1 e P_2 le matrici di passaggio dalla base canonica a $\mathcal{C}$ e a $\mathcal{C}'$ rispettivamente. Risulta:

$$P_1 := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per ogni $u \in \mathbb{R}^3$, tenendo presente che u concide con il proprio vettore coordinate rispetto alla base canonica, si ha allora:

$$u = P_2 u_{\mathcal{B}'} = P_1 u_{\mathcal{B}}.$$

Ne segue $\left(P_1^{-1}P_2\right) v_{\mathcal{B}'} = v_{\mathcal{B}}$. Quindi la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è :

$$P = P_1^{-1}P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -2 \\ -4 & -7 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Se $v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, allora:

$$v = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y-2z \\ -y+z \\ x+2y \end{pmatrix}.$$

3)

$$P^{-1}v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{6}z \\ \frac{-1}{3}x - y + \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}z \end{pmatrix}.$$

Da:

$$\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{6}z\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{-1}{3}x - y + \frac{1}{3}z\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}z\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} x+3y-2z \\ -y+z \\ x+2y \end{pmatrix} = v$, concludiamo che $P^{-1}v_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{B}'}$.

2.5 Considerata la applicazione lineare $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -12x - z \\ 7x + z \end{pmatrix}$$

si scrivano la matrice A di α rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, e la matrice A' di α rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si calcolino Im α e Ker α.

Svolgimento

Indicando con $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e con $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ quella di $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \alpha(e_1) &= -12\ \overline{e}_1 + 7\ \overline{e}_2 \\ \alpha(e_2) &= 0\ \overline{e}_1 + 0\ \overline{e}_2 \\ \alpha(e_3) &= -1\ \overline{e}_1 + 1\ \overline{e}_2 \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} -12 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dette P_1 e Q_1 le matrici di passaggio dalle basi canoniche a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ rispettivamente (si vedano i due esercizi precedenti), la matrice A' di α rispetto $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ risulta quindi

$$A' = Q_1^{-1} A P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 99 & -62 \\ \frac{-47}{2} & \frac{-137}{2} & 43 \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo che, per ogni $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, si ha $A' v_{\mathcal{B}} = (\alpha(v))_{\mathcal{C}}$.

$$A' v_{\mathcal{B}} = A' P_1^{-1} v_{\mathcal{E}} = A' P_1^{-1} v = A' \begin{pmatrix} 2x + 4y - z \\ -x - 2y + z \\ -x - y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31x + 3z \\ \frac{-43}{2} x - 2z \end{pmatrix}.$$

$$(\alpha(v))_{\mathcal{C}} = Q_1^{-1} \begin{pmatrix} -12x - z \\ 7x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31x + 3z \\ \frac{-43}{2} x - 2z \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbb{R}^3$ è generato da e_1, e_2, e_3, il sottospazio $\operatorname{Im}\alpha$ di $\mathbb{R}^2$ è generato da $\alpha(e_1), \alpha(e_2), \alpha(e_3)$. Pertanto:

$$\operatorname{Im}\alpha = \langle Ae_1, Ae_2, Ae_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -12 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Questi due vettori sono indipendenti, quindi $\operatorname{Im}\alpha = \mathbb{R}^2$. Ne segue che $\operatorname{Ker}\alpha$ ha dimensione $3 - 2 = 1$. Poichè $e_2 \in \operatorname{Ker}\alpha$, si conclude $\operatorname{Ker}\alpha = \langle e_2 \rangle$.

2.6 Data $A \in \mathrm{Mat_n(R)}$, si consideri l'applicazione $\mu_A : R^n \to R^n$ definita mediante $\mu_A(v) = Av,\ \forall\ v \in R^n$. Si dimostri che:

1) μ_A è un R-omomorfismo;

2) se A ha inversa in $\mathrm{Mat_n(R)}$, allora μ_A è un R-isomorfismo.

Svolgimento

1) • $\mu_A(v_1 + v_2) = A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = \mu_A(v_1) + \mu_A(v_2)$.

• $\mu_A(rv) = A(rv) = r\,Av = r\,\mu_A(v)$.

2) Se $A^{-1} \in \mathrm{Mat_n(R)}$, possiamo considerare l'applicazione $\mu_{A^{-1}} : R^n \to R^n$ definita mediante $\mu_{A^{-1}}(v) = A^{-1}v,\ \forall\ v \in R^n$. Essa è l'inversa di μ_A. Infatti:

$$\mu_{A^{-1}}\left(\mu_A(v)\right) = A^{-1}Av = v, \quad \mu_{A^{-1}}\left(\mu_A(v)\right) = A^{-1}Av = v.$$

Si conclude che μ_A è bijettiva, quindi un isomorfismo.

2.7 Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ due basi di un R-modulo L. Dette A la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ e B la matrice di passaggio da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$, si dimostri che $B = A^{-1}$.

Svolgimento

Per ogni $v \in L$:

$$\begin{cases} Av_{\mathcal{C}} = v_{\mathcal{B}} \\ Bv_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{C}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (AB)v_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{B}} \\ (BA)v_{\mathcal{C}} = v_{\mathcal{C}} \end{cases}$$

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. In particolare, per i vettori $v_i \in \mathcal{B}$, si ha:

$$(AB)\,(v_i)_{\mathcal{B}} = (v_i)_{\mathcal{B}}\,, \quad 1 \le i \le n$$

ossia

$$(AB)e_i = e_i, \quad 1 \le i \le n.$$

Si conclude che le colonne di AB sono ordinatamente uguali a quelle della matrice identica I, da cui $AB = I$, $B = A^{-1}$.

2.8 Sia $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ un sottoinsieme di R^n. Si dimostri che S è una base di $({}_RR)^n$ se e solo se la matrice $A = \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & \cdots & v_n \end{array} \right)$ ha inversa in $\mathrm{Mat_n(R)}$.

Svolgimento

Sia S una base di R^n. Allora A è la matrice di passaggio dalla base canonica a S. Detta B la matrice di passaggio da S alla base canonica, si ha $B \in \mathrm{Mat_n(R)}$. Inoltre $B = A^{-1}$, per l'esercizio precedente.

Viceversa supponiamo che $A^{-1} \in \mathrm{Mat_n(R)}$.

- $S = \{v_1, \dots, v_n\} = \{Ae_1, \dots, Ae_n\}$ genera $({}_RR)^n$. Infatti per ogni $v \in R^n$:

$$v = A\left(A^{-1}v\right) = A\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(Ae_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

- $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ è indipendente. Infatti $0_{R^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ implica:

$$0_{R^n} = A^{-1}0_{R^n} = A^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(A^{-1}v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Si conclude $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

2.9 Tenendo presente l'Esercizio **2.8**, di ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di R^2 si dica se è una base rispettivamente nel caso $R = \mathbb{Q}$ e $R = \mathbb{Z}$:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\},\ S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\},\ S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Svolgimento

Poniamo $A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

• $\det A_1 = 41$. Poichè $41 \in \mathbb{Q}^*$, ma $41 \notin \mathbb{Z}^*$, la matrice A_1 ha inversa in $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$ ma non in $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$. Infatti:

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{41} & \frac{-1}{41} \\ \frac{1}{41} & \frac{8}{41} \end{pmatrix}.$$

Quindi S_1 è base di $\mathbb{Q}^2$ ma non di $\mathbb{Z}^2$.

• $\det A_2 = 0$, quindi A_2 non ha inversa nè in $\mathbb{Q}$ nè in $\mathbb{Z}$. Pertanto S_2 non è una base nè di $\mathbb{Q}^2$ nè di $\mathbb{Z}^2$.

• $\det A_3 = -1 \in \mathbb{Z}^*$. Quindi A_3 ha inversa in $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$ e in $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$: infatti $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si conclude che S_3 è base sia di $\mathbb{Q}^2$ sia di $\mathbb{Z}^2$.

2.10 Siano R un dominio di integrità , $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un sottoinsieme di R^n. Posto $A = \left(v_1 \mid \cdots \mid v_n \right)$, si supponga $\det \mathrm{A} \neq 0$. Si dimostri che, in tal caso, S è indipendente.

Svolgimento

Sia $\mathrm{ad}\, A$ l'aggiunta di A. Ricordiamo che si ha:

$$(\mathrm{ad}\, A)\, A = A\, (\mathrm{ad}\, A) = \det \mathrm{A}\, I.$$

Supponiamo $0_{R^n} = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ $(x_i \in R)$, ossia:

$$0_{R^n} = \sum_{i=1}^n x_i A e_i = A \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Moltiplicando il primo e l'ultimo membro per la matrice ad A,

$$0_{R^n} = (\mathrm{ad}\, A)\, A \sum_{i=1}^n x_i e_i = \det A \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n (\det A\, x_i) e_i.$$

Ne segue $(\det A)\, x_i = 0$ per ogni i. Essendo $\det A \neq 0$ e R privo di divisori dello zero, si conclude $x_i = 0$, per ogni i. Pertanto S è indipendente.

2.11 Un R-modulo M sia somma diretta di due sottomoduli M_1 e M_2.
Sia $f : M \to M$ un R-isomorfismo tale che $f(M_1) = M_1$.

i) Si dimostri che $M = M_1 \dot{+} f(M_2)$;

ii) si dia inoltre un esempio in cui $f(M_2) \not\leq M_2$.

Svolgimento

i) Essendo f suriettiva si ha $M = f(M)$. Da $M = M_1 + M_2$ segue

$$M = f(M) = f(M_1) + f(M_2) = M_1 + f(M_2).$$

Sia ora $m_1 = f(m_2)$ un elemento di $M_1 \cap f(M_2)$. Dall'ipotesi $f(M_1) = M_1$ segue che esiste $\overline{m}_1 \in M_1$ tale che

$$f(\overline{m}_1) = m_1 = f(m_2).$$

Ne segue $\overline{m}_1 = m_2$, essendo f iniettiva. Così $m_2 \in M_1 \cap M_2 = \{0_M\}$, $m_2 = 0_M$, $f(m_2) = 0_M$. Si conclude $M_1 \cap f(M_2) = \{0_M\}$.

ii) Siano $M = \mathbb{R}^4$, $f = \mu_A : M \to M$ l'applicazione lineare $v \mapsto Av$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\det A \neq 0$, quindi f è bijettiva. Poniamo

$$M_1 = \langle e_1, e_2 \rangle, \quad M_2 = \langle e_3, e_4 \rangle.$$

$M = M_1 \dot{+} M_2$.

$f(M_1) = \langle Ae_1, Ae_2 \rangle = M_1$

$f(e_3) = e_1 + e_3 + e_4 \notin \langle e_3, e_4 \rangle$. Di conseguenza $f(M_2) \nleq M_2$.

2.12 Sia $f : M \to N$ un omomorfismo di R-moduli e sia M_1 un sottomodulo di M tale che $f(M_1) = \operatorname{Im} f$. Si dimostri che $M = \operatorname{Ker} f + M_1$.

Svolgimento

Occorre dimostrare che ogni elemento di M è somma di un elemento di Ker f e di un elemento di M_1. Sia $m \in M$. Esiste $m_1 \in M_1$ tale che $f(m) = f(m_1)$. Ne segue

$$f(m) - f(m_1) = 0_N, \quad f(m - m_1) = 0_N, \quad (m - m_1) \in \operatorname{Ker} f.$$

Si conclude $m = (m - m_1) + m$ con $(m - m_1) \in \operatorname{Ker} f$, $m_1 \in M_1$.

2.13 Siano A, A', B, B' delle matrici tali che A è equivalente ad A', B è equivalente a B'. Si dimostri che sono equivalenti le matrici:

$$C := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad C' := \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}.$$

Svolgimento

Per ipotesi esistono matrici invertibili $Q_1,\ P_1,\ Q_2,\ P_2$ tali che

$$A' = Q_1AP_1,\ B' = Q_2BP_2.$$

Le matrici:

$$Q := \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$$

sono invertibili. Infatti:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1^{-1} & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Eseguendo il prodotto di matrici a blocchi si conclude che $QCP = C'$, da cui l'asserto.

2.14 Si consideri il $\mathbb{Q}[x]$-modulo

$$V := \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^4 - 9\rangle}.$$

Posto $J := \langle x^4 - 9\rangle$, si trovi una base $\mathcal{B}$ di V come $\mathbb{Q}$-modulo e si scriva la matrice C, rispetto a $\mathcal{B}$, della applicazione lineare $\mu_x : V \to V$ tale che

$$J + f(x) \mapsto J + xf(x).$$

Si scriva inoltre $\mu_x\left(J + x^9\right)$ come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$.

Svolgimento

Ogni elemento $J + f(x)$ di V si scrive in modo unico nella forma

$$J + q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3$$

dove $q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3$ è il resto della divisione di $f(x)$ per $x^4 - 9$.

Possiamo quindi scegliere $\mathcal{B} = \{w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4\}$, dove:

$$w_1 := J + 1, \quad w_2 := J + x, \quad w_3 := J + x^2, \quad w_4 := J + x^3.$$

$$\begin{cases} \mu_x(w_1) = w_2 \\ \mu_x(w_2) = w_3 \\ \mu_x(w_3) = w_4 \\ \mu_x(w_4) = 9w_1 \end{cases} \implies C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posto $v = J + x^9$ si ha $v = J + 81x = 81w_2$. Quindi $\mu_x(v) = 81w_3$.

2.15 Si considerino il $\mathbb{Q}[x]$-modulo

$$V := \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^2-3\rangle} \oplus \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^4-9\rangle},$$

le proiezioni canoniche

$$\pi_1 : V \to \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^2-3\rangle}, \quad \pi_2 : V \to \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^4-9\rangle}$$

e la applicazione lineare $\mu_x : V \to V$ tale che $v \mapsto xv$.

i) Si dimostri che i sottomoduli

$$V_1 := \text{Ker } \pi_2, \quad V_2 := \text{Ker } \pi_1$$

sono μ_x-invarianti e che $V = V_1 \dot{+} V_2$.

ii) Per $i = 1, 2$ si trovino delle basi $\mathcal{B}_i$ di V_i e le matrici C_i delle restrizioni della μ_x rispetto $\mathcal{B}_i$. Si deduca la matrice C della μ_x rispetto a $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

Svolgimento

Ponendo $I := \left\langle x^2-3\right\rangle$, $J := \left\langle x^4-9\right\rangle$, si ha:

$$V_1 := \left\{ \begin{pmatrix} I + f(x) \\ J + 0 \end{pmatrix} \mid f(x) \in \mathbb{Q}[x] \right\}$$

$$V_2 := \left\{ \begin{pmatrix} I + 0 \\ J + g(x) \end{pmatrix} \mid f(x) \in \mathbb{Q}[x] \right\}.$$

Ne segue

$$m_x\left(V_1\right) := \left\{ \begin{pmatrix} I + xf(x) \\ J + 0 \end{pmatrix} \mid f(x) \in \mathbb{Q}[x] \right\} \leq V_1.$$

Analogamente

$$\mu_x\left(V_2\right) := \left\{ \begin{pmatrix} I + 0 \\ J + xg(x) \end{pmatrix} \mid g(x) \in \mathbb{Q}[x] \right\} \leq V_2.$$

Quindi V_1 e V_2 sono μ_x-invarianti. Poichè ogni elemento di V è della forma

$$\begin{pmatrix} I + f(x) \\ J + g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + f(x) \\ J + 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I + 0 \\ J + g(x) \end{pmatrix}$$

si ha $V = V_1 + V_2$. Ovviamente $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$. Pertanto $V = V_1 \dot{+} V_2$.

Come base di V_1 possiamo scegliere $\mathcal{B}_1 = \{v_1,\ v_2\}$, dove

$$v_1 := \begin{pmatrix} I + 1 \\ 0_{V_2} \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} I + x \\ 0_{V_2} \end{pmatrix}.$$

Da $\mu_x(v_1) = v_2$, $\mu_x(v_2) = 3v_1$ segue $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Come base di V_2 possiamo scegliere $\mathcal{B}_2 = \{w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,\}$, dove

$$w_1 := \begin{pmatrix} 0_{V_1} \\ J+1 \end{pmatrix},\ w_2 := \begin{pmatrix} 0_{V_1} \\ J+x \end{pmatrix},\ w_3 := \begin{pmatrix} 0_{V_1} \\ J+x^2 \end{pmatrix},\ w_4 := \begin{pmatrix} 0_{V_1} \\ J+x^3 \end{pmatrix}.$$

La matrice C_2 è deducibile dall'esercizio precedente.

Pertanto la matrice di $m_x : V \to V$ rispetto $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ è

$$\begin{pmatrix} C_1 & \\ & C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo fatto può essere trovato anche considerando direttamente l'azione di μ_x su $\mathcal{B}$.

2.16 Si trovi una base $\mathcal{B}$ di

$$V := \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x-3 \rangle} \oplus \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x+1 \rangle} \oplus \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x \rangle}$$

come $\mathbb{Q}$-modulo e si scriva la matrice C, rispetto a $\mathcal{B}$, della applicazione lineare $\mu_x : V \to V$ tale che $v \mapsto xv$.

Svolgimento

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} \langle x-3 \rangle + 1 \\ \langle x+1 \rangle + 0 \\ \langle x \rangle + 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \langle x-3 \rangle + 0 \\ \langle x+1 \rangle + 1 \\ \langle x \rangle + 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \langle x-3 \rangle + 0 \\ \langle x+1 \rangle + 0 \\ \langle x \rangle + 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Esercizi III

Moduli f.g. su PID

3.1 Si dimostri che gli unici ideali di un campo $\mathbb{K}$ sono $\{0_{\mathbb{K}}\}$ e $\mathbb{K}$.

Svolgimento

Sia I un ideale di $\mathbb{K}$. Se esiste $i \neq 0_{\mathbb{K}}$ in I, allora $i^{-1}i = 1_{\mathbb{K}} \in I$. Ne segue $k1_{\mathbb{K}} \in I$ per ogni $k \in \mathbb{K}$, da cui $I = \mathbb{K}$.

3.2 Siano $d_1, d_2 \in D$, dominio di integrità . Si dimostri che

$$\langle d_1 \rangle \geq \langle d_2 \rangle \quad \Leftrightarrow \quad d_1 | d_2.$$

Svolgimento

Ricordiamo che, per $d \in D$, si definisce $\langle d \rangle := \{dq \mid q \in D\}$.
In particolare $d = d\,1$ appartiene a $\langle d \rangle$.

Sia $\langle d_1 \rangle \geq \langle d_2 \rangle$. Da $d_2 \in \langle d_1 \rangle$ segue $d_2 = d_1 q$, per un opportuno $q \in D$.
Pertanto d_1 divide d_2.

Viceversa, supponiamo $d_1 | d_2$, ossia $d_2 = d_1 q_1$, per un opportuno $q_1 \in D$. Da $d_2 q = d_1 (q_1 q)$, per ogni $q \in D$, segue $\langle d_1 \rangle \geq \langle d_2 \rangle$.

3.3 Nell'anello $\mathbb{Z}$, si dimostri che $\langle 3 \rangle = \langle z \rangle \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm 3$.

Svolgimento

Ricordiamo che, per $a \in \mathbb{Z}$, si definisce $\langle a \rangle := \{ak \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
In particolare $a = a\,1$ appartiene a $\langle a \rangle$.

Sia $\langle z \rangle = \langle 3 \rangle$. Ne segue $3 \in \langle z \rangle$, ossia $3 = z\overline{k}$ per un opportuno intero $\overline{k}$. Pertanto $z = \pm 1$ o $z = \pm 3$. Se fosse $z = \pm 1$ si avrebbe $\langle z \rangle = \mathbb{Z} \neq \langle 3 \rangle$. Si conclude $z = \pm 3$.

Viceversa sia $z = -3$.
Da $3k = -3(-k)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, segue $\langle 3 \rangle \leq \langle -3 \rangle$.
Da $(-3)k = 3(-k)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, segue $\langle -3 \rangle \leq \langle 3 \rangle$.
Pertanto $\langle -3 \rangle = \langle 3 \rangle$.

3.4 Nell'anello $\mathbb{Q}[x]$, si dimostri che

$$\langle x^2 - 1 \rangle = \langle f(x) \rangle \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \lambda(x^2 - 1),\ 0 \neq \lambda \in \mathbb{Q}.$$

Svolgimento

Ricordiamo che, per $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, si definisce

$$\langle g(x) \rangle := \{g(x)q(x) \mid q(x) \in \mathbb{Q}[x]\}.$$

In particolare $g(x) = g(x)\,1$ appartiene a $\langle g(x) \rangle$.

Sia $\langle x^2 - 1 \rangle = \langle f(x) \rangle$. Ne segue $x^2 - 1 = f(x)q(x)$ per un opportuno polinomio $q(x)$, da cui $f(x) = \lambda$, o $f(x) = \lambda(x-1)$, o $f(x) = \lambda(x+1)$ o $f(x) = \lambda(x^2-1)$, per un opportuno $\lambda \in \mathbb{Q}$ non nullo. Siccome λ, $\lambda(x-1)$ e $\lambda(x+1)$ non sono multipli di $x^2 - 1$, avendo grado < 2, si conclude $f(x) = \lambda(x^2 - 1)$, per qualche numero razionael $\lambda \neq 0$.

Viceversa sia $f(x) = \lambda(x^2 - 1)$, $\ 0 \neq \lambda \in \mathbb{Q}$.
Da $(x^2 - 1)q(x) = \left(\lambda(x^2 - 1)\right)\left(\lambda^{-1}q(x)\right)$ per ogni $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$, segue

$$\langle x^2 - 1 \rangle \leq \langle \lambda(x^2 - 1) \rangle.$$

Da $\lambda(x^2 - 1)q(x) = (x^2 - 1)\left(\lambda q(x)\right)$ per ogni $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$, segue

$$\langle \lambda x^2 - 1 \rangle \leq \langle (x^2 - 1) \rangle.$$

Pertanto $\langle x^2 - 1 \rangle = \langle \lambda x^2 - 1 \rangle$.

3.5 Si dimostri che, se $\mathbb{K}$ è un campo, allora tutti gli ideali di $\mathbb{K}[x]$ sono principali.

Svolgimento

Sia I un ideale di $\mathbb{K}[x]$. Se I è l'ideale nullo, è generato dal polinomio nullo. Altrimenti sia $d(x)$ un polinomio di I di grado minimo fra i polinomi non nulli di I. Per definizione di ideale ogni multiplo di $d(x)$ appartiene a I. D'altra parte, sia $a(x)$ un polinomio di I. Dividendo $a(x)$ per $d(x)$ si ha $a(x) = d(x)q(x) + r(x)$, dove $r(x)$ ha grado strettamente inferiore a quello di $d(x)$. Poichè $r(x) = a(x) - d(x)q(x)$ appartiene a I essendo somma di due suoi elementi, ne segue che $r(x)$ è il polinomio nullo per la minimalità del grado di $d(x)$. Pertanto $a(x) = d(x)q(x)$ è multiplo di $d(x)$. Concludiamo che I è l'insieme dei multipli di $d(x)$, ossia è generato da $d(x)$.

3.6 Sia $M =$ un D-modulo f.g. e $\mathrm{d}(M)$ indichi il minimo numero dei suoi generatori. Si dimostri che:
1) se N è immagine epimorfa di M allora $\mathrm{d}(N) \leq \mathrm{d}(M)$;
2) se $M = X + Y$, con X e Y sottomoduli, allora $\mathrm{d}(M) \leq \mathrm{d}(X) + \mathrm{d}(Y)$.

Svolgimento

1) Sia $f : M \to N$ un epimorfismo di D-moduli. Posto $\mathrm{d}(M) = n$, fissiamo un insieme di generatori di M

$$\{m_1, \ldots, m_n\}$$

di M, avente cardinalità minima n. La sua immagine

$$\{f(m_1), \ldots, f(m_n)\}$$

ha cardinalità $\leq n$ e genera N per la suriettività di f. Infatti, per ogni $y \in N$, esiste $x \in M$ tale che $f(x) = y$. Da $x = \sum_{i=1}^{n} d_i m_i$, per opportuni coefficenti $d_i \in D$, segue

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i f(m_i).$$

Pertanto $d(N) \leq n$.

2) Posto $d(X) = k$, sia $\{x_1, \ldots, x_k\}$ un insieme di generatori di X. Analogamente, posto $d(Y) = h$, sia$\{y_1, \ldots, y_h\}$ un insieme di generatori di Y.
Verifichiamo che

$$S := \{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_h\}$$

è un insieme di generatori di M. Infatti, per ogni $m \in M$, esistono $x \in X$ e $y \in Y$ tali che $m = x + y$. Da

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i, \ y = \sum_{i=1}^{h} b_i y_i$$

per opportuni coefficenti $a_i, b_j \in D$, segue

$$m = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i + \sum_{i=1}^{k} b_i y_i.$$

Pertanto S genera M. Siccome $|S| = h + k$, si conclude che $d(M) \leq k + h$.

3.7 Sia $M = M_1 + M_2$ un D-modulo. Si dimostri che

$$\mathrm{Ann}\,(M) = \mathrm{Ann}\,(M_1) \cap \mathrm{Ann}\,(M_2).$$

Svolgimento

$\mathrm{Ann}\,(M) \leq \mathrm{Ann}\,(M_1)$. Sia infatti $x \in \mathrm{Ann}\,(M)$. Per ogni $m_1 \in M_1$, si ha $m_1 \in M$ da cui $xm_1 = 0_M$. Pertanto $x \in \mathrm{Ann}\,(M_1)$. Analogamente si dimostra $\mathrm{Ann}\,(M) \leq \mathrm{Ann}\,(M_2)$. Ne segue

$$\mathrm{Ann}\,(M) \leq \mathrm{Ann}\,(M_1) \cap \mathrm{Ann}\,(M_2).$$

Viceversa sia $x \in \mathrm{Ann}\,(M_1) \cap \mathrm{Ann}\,(M_2)$. Per ogni $m \in M$ esistono $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ tali che $m = m_1 + m_2$. Da $x \in \mathrm{Ann}\,(M_1)$ segue $xm_1 = 0_M$. Da $x \in \mathrm{Ann}\,(M_2)$ segue $xm_2 = 0_M$. Pertanto $xm = xm_1 + xm_2 = 0_M$, da cui $x \in \mathrm{Ann}\,(M)$. Abbiamo così verificato

$$\mathrm{Ann}\,(M_1) \cap \mathrm{Ann}\,(M_2) \leq \mathrm{Ann}\,(M).$$

La doppia inclusione dà la tesi.

3.8 Si calcolino gli annullatori dei seguenti $\mathbb{Z}$-moduli:

$$\mathbb{Z}, \quad \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, \quad \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}, \quad \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}, \quad \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}.$$

Svolgimento

$\mathrm{Ann}\,(\mathbb{Z}) = \{0\}$.

$\mathrm{Ann}\,\left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right) = 2\mathbb{Z}$.

$\mathrm{Ann}\,\left(\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}\right) = 5\mathbb{Z}$.

$\mathrm{Ann}\,\left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}\right) = 5\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z} = 10\mathbb{Z}$.

$\mathrm{Ann}\,\left(\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}\right) = 5\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z} = 18\mathbb{Z}$.

3.9 Si dimostri che l'applicazione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$ tale che $z \mapsto \begin{pmatrix} [z]_2 \\ [z]_5 \end{pmatrix}$ è un epimorfismo di $\mathbb{Z}$-moduli. Per ciascun elemento del codominio, si indichi una preimmagine in $\mathbb{Z}$. Si determini Ker f.

Svolgimento

Per ogni $z, t \in \mathbb{Z}$ si ha:

$$f(z+t) := \begin{pmatrix} [z+t]_2 \\ [z+t]_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [z]_2 \\ [z]_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [t]_2 \\ [t]_5 \end{pmatrix} = f(z) + f(t).$$

Pertanto f è un omomorfismo.
Dato un generico elemento $\begin{pmatrix} [a]_2 \\ [b]_5 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$, mediante il Teorema cinese del resto si trova che una sua preimmagine in $\mathbb{Z}$ è $5a - 4b$. Pertanto f è suriettiva.
Per $z \in \mathbb{Z}$ si ha

$$f(z) = \begin{pmatrix} [z]_2 \\ [z]_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0]_2 \\ [0]_5 \end{pmatrix}$$

se e solo se $2|z$ e $5|z$, se e solo se $10|z$. Pertanto $\operatorname{Ker} f = 10\mathbb{Z}$.
Per il Teorema fondamentale degli omomorfismi

$$\frac{\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{10} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5.$$

3.10 Si dica se l'applicazione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ tale che

$$z \mapsto \begin{pmatrix} [z]_2 \\ [z]_4 \end{pmatrix}$$

è un omorfismo di $\mathbb{Z}$-moduli, e se è suriettiva.

Svolgimento

Per ogni $z, t \in \mathbb{Z}$ si ha:

$$f(z+t) := \begin{pmatrix} [z+t]_2 \\ [z+t]_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [z]_2 \\ [z]_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [t]_2 \\ [t]_4 \end{pmatrix} = f(z) + f(t).$$

Pertanto f è un omomorfismo. f non è suriettiva. Si vede in due modi.

I modo $\operatorname{Ker} f = 4\mathbb{Z}$, da cui $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_4 \simeq \operatorname{Im} f$. Ne segue che $|\operatorname{Im} f| = 4$.
D'altra parte $|\mathbb{Z}_2 \oplus Z_4| = 8 > 4$.

II modo L'elemento $\begin{pmatrix} [1]_2 \\ [2]_4 \end{pmatrix}$ non ha preimmagini in $\mathbb{Z}$. Infatti, detta z una sua eventuale preimmagine dovrebbe essere contemporaneamente

$$\begin{cases} z \equiv 1 \pmod 2 \\ z \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

La prima condizione implica $z = 2q + 1$, con $q \in \mathbb{Z}$, da cui z dispari.

La seconda condizione implica $z = 4k + 2$, con $q \in \mathbb{Z}$, da cui $z = 2(2k + 1)$ pari, contraddizione.

3.11 Si dimostri che l'applicazione $f : \mathbb{Q}[x] \to \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^2+2\rangle} \oplus \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^3+1\rangle}$ tale che

$$a(x) \mapsto \begin{pmatrix} \langle x^2 + 2\rangle + a(x) \\ \langle x^3 + 1\rangle + a(x) \end{pmatrix}$$

è un epimorfismo di $\mathbb{Q}[x]$-moduli. Si indichi una preimmagine di

$$\begin{pmatrix} \langle x^2 + 2\rangle + x + 4 \\ \langle x^3 + 1\rangle + x^2 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{Q}[x]$. Si determini Ker f.

Svolgimento

Poniamo $I = \langle x^2 + 2\rangle$, $J = \langle x^3 + 1\rangle$. Per ogni $a(x), b(x) \in \mathbb{Q}[x]$ si ha:

$f(a(x) + b(x)) :=$

$$\begin{pmatrix} I + a(x) + b(x) \\ J + a(x) + b(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + a(x) \\ J + a(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I + b(x) \\ J + b(x) \end{pmatrix} = f(a(x)) + f(b(x)).$$

$f(a(x)b(x)) :=$

$$\begin{pmatrix} I + a(x)b(x) \\ J + a(x)b(x) \end{pmatrix} = a(x) \begin{pmatrix} I + b(x) \\ J + b(x) \end{pmatrix} = a(x)f(b(x)).$$

Pertanto f è un $\mathbb{Q}[x]$-omomorfismo. f è suriettiva per il Teorema cinese del resto. Infatti, risolvendo il relativo sistema di congruenze, si trova che una preimmagine in $\mathbb{Q}[x]$ del generico elemento

$$\begin{pmatrix} \langle x^2 + 2\rangle + a(x) \\ \langle x^3 + 1\rangle + b(x) \end{pmatrix}$$

è $\frac{1}{9}(x^3+1)(2x+1)a(x) + (x^2+2)(-2x^2 - x + 4)b(x)$. In particolare per $a(x) = (x+4)$, $b(x) = x^2$ si ha una preimmagine dell'elemento richiesto.
Ker f è l'ideale di $\mathbb{Q}[x]$ generato da $(x^3 + 1)(x^2 + 2)$, ossia $\langle x^5 + 2x^3 + x^2 + 2\rangle$.

3.12 Si dica se l'applicazione $f : \mathbb{Q}[x] \to \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^2-1\rangle} \oplus \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x-1\rangle}$ tale che

$$a(x) \mapsto \begin{pmatrix} \langle x^2 - 1\rangle + a(x) \\ \langle x - 1\rangle + a(x) \end{pmatrix}$$

è un omomorfismo di $\mathbb{Q}[x]$-moduli e se è suriettiva.

Svolgimento

Ponendo $I = \langle x^2 - 1 \rangle$, $J = \langle x - 1 \rangle$ e ragionando come nell'esercizio precedente, si ha che f è un omomorfismo di $\mathbb{Q}[x]$-moduli. Tuttavia, poichè $x^2 - 1$ e $x - 1$ non sono coprimi, non si può applicare il Teorema Cinese del resto. In effetti f non è suriettiva. Ad esempio l'elemento

$$\begin{pmatrix} \langle x^2 - 1 \rangle + x - 1 \\ \langle x - 1 \rangle + 1 \end{pmatrix}$$

non ha alcuna preimmagine. Infatti, detta $c(x)$ una sua eventuale preimmagine, dovrebbe essere

$$\begin{cases} c(x) & \equiv x - 1 \qquad \pmod{(x^2 - 1)} \\ c(x) & \equiv 1 \qquad \pmod{(x - 1)} \end{cases}$$

La prima condizione implica $c(x) \equiv 0 \pmod{(x - 1)}$, in contrasto con la seconda.

3.13 Sia I l'deale di $\mathbb{K}[x]$ generato dal polinomio $d(x)$, di grado $n > 0$. Si provi che ad ogni laterale di I appartiene un unico polinomio $r(x)$ di grado $\leq n - 1$.

Svolgimento

Sia $I + f(x)$ un laterale, con $f(x) \in \mathbb{K}[x]$. Dividendo $f(x)$ per $d(x)$ si ha $f(x) = d(x)q(x) + r(x)$, dove $r(x)$ ha grado $\leq n - 1$. Da $r(x) = d(x)(-q(x)) + f(x)$ segue $r(x) \in I + f(x)$. Infine, sia $s(x) \in I + f(x) = I + r(x)$, con $\deg s(x) \leq n - 1$. Il polinomio differenza $s(x) - r(x)$ ha grado $\leq n - 1$ e deve essere divisibile per $d(x)$, che ha grado n. Si conclude che $s(x) - r(x) = 0$, da cui $s(x) = r(x)$.

3.14 Per i seguenti $\mathbb{Q}[x]$-moduli si dia un insieme di generatori minimale come $\mathbb{Q}[x]$-modulo e un insieme di generatori minimale come $\mathbb{Q}$-modulo:

$$M = \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x + 4 \rangle}\ , \quad N = \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^3 + 2x - 1 \rangle}, \quad M \oplus N.$$

Si dimostri che M, N e $M \oplus N$, come $\mathbb{Q}[x]$-moduli, non hanno base.

Svolgimento

Come $\mathbb{Q}[x]$-moduli M, N e $M \oplus N$ sono tutti generati da 1 elemento (non essendo nulli, non possono essere generato da 0 elementi). Ad esempio $\langle x + 4 \rangle + 1$ genera M, $\langle x^3 + 2x - 1 \rangle + 1$ genera N e $\langle x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 7x - 4 \rangle + 1$ genera $M \oplus N$.

Se avessero una base come $\mathbb{Q}[x]$-moduli sarebbero liberi, in particolare privi di torsione. Ma i loro ideali annullatori in $\mathbb{Q}[x]$ sono rispettivamente $\langle x + 4 \rangle$, $\langle x^3 + 2x - 1 \rangle$ e $\langle x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 7x - 4 \rangle$.

Tenendo presente l'esercizio precedente, si ottengono le seguenti $\mathbb{Q}$-basi:

- $\{\langle x+4\rangle + 1\}$ per M;
- $\{\langle x^3+2x-1\rangle + 1,\ \langle x^3+2x-1\rangle + x,\ \langle x^3+2x-1\rangle + x^2\}$ per N;

Ponendo $I = \langle x+4\rangle$, $J = \langle x^3+2x-1\rangle$, una base di $M \oplus N$ è :

$$\begin{pmatrix} I+1 \\ J+0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I+0 \\ J+1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I+0 \\ J+x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I+0 \\ J+x^2 \end{pmatrix}.$$

3.15 Si determinino l'ordine, i divisori elementari, la decomposizione primaria, i fattori invarianti, la forma normale, l'annullatore, il minimo numero di generatori $d(A)$ e $d(B)$ dei seguenti gruppi abeliani:

$$A := \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_{120} \oplus \mathbb{Z}_{50}, \quad B := \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{27}.$$

Svolgimento

$|A| = 20 \cdot 120 \cdot 50 = 120000$, divisori elementari $4, 5, 8, 3, 5, 2, 25$,

$$A \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{25} \quad \text{(decomposizione primaria).}$$

Fattori invarianti:

$d_3 = \text{m.c.m}\,\{4, 5, 8, 3, 5, 2, 25\} = 8 \cdot 38 \cdot 25 = 600$

$d_2 = \text{m.c.m}\,\{4, 5, , 5, 2\} = 4 \cdot 5 = 20$

$d_1 = \text{m.c.m}\,\{2, 5\} = 10.$

$$A \simeq \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_{600} \quad \text{(forma normale).}$$

$\text{Ann}\,(A) = 600\mathbb{Z}$. $d(A) = 3$.

$|B| = 9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 27 = 3^7$, divisori elementari $3, 3, 9, 27$.
B è già assegnato mediante una sua decomposizione primaria (definita a meno di permutazioni degli addendi diretti).
Fattori invarianti: $d_4 = 27$, $d_3 = 9$, $d_2 = d_1 = 3$.

$$B \simeq \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{27} \quad \text{(forma normale).}$$

$\text{Ann}\,(B) = 27\mathbb{Z}$. $d(B) = 4$.

3.16 Si determinino i gruppi abeliani non isomorfi di ordine p^4, con p primo.

Svolgimento

- $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$;
- $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$;
- $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^3}$;
- $\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$;
- $\mathbb{Z}_{p^4}$;

3.17 Si determinino i gruppi abeliani non isomorfi di ordine 120.

Svolgimento

Detta $d_1, \ldots, d_t$ la sequenza dei fattori invarianti di un gruppo abelliano di ordine $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ si ha $t \leq 3$.

- $t = 3,\ d_1 = d_2 = 2,\ d_3 = 30,\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{30}$;
- $t = 2,\ d_1 = 2\ d_2 = 60,\quad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{60}$;
- $t = 1,\ d_1 = 120,\ \mathbb{Z}_{120}$.

3.18 Si determinino i gruppi abeliani non isomorfi di ordine 324.

Svolgimento

Detta $d_1, \ldots, d_t$ la sequenza dei fattori invarianti di un gruppo abelliano di ordine $324 = 2^2 \cdot 3^4$ si ha $t \leq 4$.

- $t = 4,\ d_1 = d_2 = 3,\ d_3 = d_4 = 6,\ \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_6$;
- $t = 4,\ d_1 = d_2 = d_3 = 3,\ d_4 = 12,\ \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{12}$;
- $t = 3,\ d_1 = 3,\ d_2 = 6,\ d_3 = 18,\ \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{18}$;
- $t = 3,\ d_1 = d_2 = 3,\ d_3 = 36,\ \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{36}$;
- $t = 2,\ d_1 = 3,\ d_2 = 108,\quad \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{108}$;
- $t = 2,\ d_1 = 2,\ d_2 = 162,\quad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{162}$;
- $t = 2,\ d_1 = 9,\ d_2 = 36,\quad \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{36}$;
- $t = 2,\ d_1 = 18,\ d_2 = 18,\quad \mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{18}$;
- $t = 2,\ d_1 = 6,\ d_2 = 54,\quad \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{54}$;
- $t = 1,\ d_1 = 324,\ d_2 = 36,\quad \mathbb{Z}_{324}$.

3.19 Si determini la decomposizione primaria del $\mathbb{C}[x]$-modulo:

$$V := \frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^4 + 16 \rangle}.$$

Si calcoli una base di V come $\mathbb{C}$-modulo.

Svolgimento

Il numero complesso $\epsilon = e^{\frac{\pi}{4}i}$ è tale che $\epsilon^4 = -1$. Ne segue che le radici di $x^4 + 16$ sono 2ϵ, $2\epsilon^3$, $2\epsilon^5$, $2\epsilon^7$. Pertanto la decomposizione primaria di V è :

$$\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle(x-2\epsilon)\rangle} \oplus \frac{\mathbb{C}[x]}{\langle(x-2\epsilon^3)\rangle} \oplus \frac{\mathbb{C}[x]}{\langle(x-2\epsilon^5)\rangle} \oplus \frac{\mathbb{C}[x]}{\langle(x-2\epsilon^7)\rangle}.$$

Posto $\left\langle x^4 + 16 \right\rangle := I$, una base di V come $\mathbb{C}$-modulo è :

$$\left\{ I + 1,\ I + x,\ I + x^2,\ I + x^3 \right\}.$$

3.20 Si scrivano i divisori elementari, la decomposizione primaria, i fattori invarianti e la forma normale del seguente $\mathbb{Z}$-modulo (= gruppo abeliano):

$$\mathbb{Z}_{35} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}_{50} \oplus \mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{12}.$$

Svolgimento

Divisori elementari: $5, 7, 7^2, 2, 5^2, 2, 3^2, 2^2, 3$.

Decomposizione primaria:

$$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4.$$

Fattori invarianti:

$d_3 = \text{m.c.m}\left\{2, 2, 2^2, 3, 3^2, 5, 5^2, 7, 7^2\right\} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 44100$

$d_2 = \text{m.c.m}\left\{2, 2, 3, 5, 7\right\} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$

$d_1 = 2$.

Forma normale:

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{210} \oplus \mathbb{Z}_{44100}.$$

3.21 Si scrivano i divisori elementari, la decomposizione primaria, i fattori invarianti e la forma normale del seguente $\mathbb{C}x]$-modulo:

$$\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^4 - 4\rangle} \oplus \frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^4 - 4x^2 + 4\rangle}.$$

Svolgimento

Divisori elementari:

$(x - \sqrt{2}),\ (x + \sqrt{2}),\ (x - \sqrt{2}i),\ (x + \sqrt{2}i),\ (x - \sqrt{2})^2,\ (x + \sqrt{2})^2.$

Decomposizione primaria:

$$\frac{\mathbb{C}[x]}{\left\langle x-\sqrt{2}\right\rangle} \oplus \frac{\mathbb{C}[x]}{\left\langle x+\sqrt{2}\right\rangle} \oplus \frac{\mathbb{C}[x]}{\left\langle x-\sqrt{2}i\right\rangle} \oplus \frac{\mathbb{C}[x]}{\left\langle x+\sqrt{2}i\right\rangle} \oplus \frac{\mathbb{C}[x]}{\left\langle (x-\sqrt{2})^2\right\rangle} \oplus \frac{\mathbb{C}[x]}{\left\langle (x+\sqrt{2})^2\right\rangle}.$$

Fattori invarianti:

$d_2(x) = (x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2 = x^6 - 2x^4 - 4x^2 + 8.$

$d_1(x) = x^2 - 2.$

Forma normale:

$$\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^2-2\rangle} \oplus \frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^6-2x^4-4x^2+8\rangle}.$$

Esercizi IV

Forme canoniche delle matrici

Data $A \in \mathrm{Mat_n}(\mathbb{K})$ indichiamo con $d_1(x), \ldots, d_t(x)$ la sequenza dei suoi invarianti di similaritá e con $n_1, \ldots, n_t$ i loro rispettivi gradi. Ricordiamo che é:

$$n = \sum_{i=1}^{t} n_i, \quad \operatorname{car} A = \prod_{i=1}^{t} d_i(x).$$

Due matrici sono coniugate se e solo hanno la stessa sequenza di fattori invarianti.
Indichiamo inoltre con $\mu_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ l'applicazione lineare

$$v \mapsto Av, \quad \forall\, v \in \mathbb{K}^n.$$

La matrice di μ_A, rispetto alla base canonica, é A.

4.1 In $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$ si dica se sono coniugate le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si trovi inoltre una base di $\mathbb{Q}^2$ rispetto alla quale la μ_A abbia matrice la forma canonica razionale di A. Idem per μ_B.

Svolgimento

A e B non sono coniugate perchè , se lo fossero, avrebbero lo stesso polinomio caratteristico. Ma $\operatorname{car} A \;=\; x^2 - 3x - 1$. Invece $\operatorname{car} B \;=\; x^2 - 3x$.

A non è scalare. Quindi il suo polinomio minimo coincide con il suo polinomio caratteristico e la sua forma canonica razionale è una matrice companion. Idem per B.
L'insieme $\mathcal{B} := \{e_1, Ae_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ é indipendente, quindi una base di $\mathbb{Q}^2$.
Da $A^2 - 3A - I = 0$ segue

$$A(Ae1) = A^2 e_1 = (I + 3A)e_1 = e_1 + 3(Ae1).$$

Si conclude che la matrice di μ_A rispetto $\mathcal{B}$ é $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, forma canonica razionale di A.

Poniamo $v = e_1 + e_2$. L'insieme $\mathcal{C} := \{v, Bv\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ é indipendente, quindi una base di $\mathbb{Q}^2$. Da $B^2 - 3B = 0$ segue

$$B(Bv) = B^2 v = 3Bv.$$

Si conclude che la matrice di μ_B rispetto $\mathcal{C}$ é $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, forma canonica razionale di B.

4.2 Si dimostri che due matrici non scalari A, B di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{K})$ sono coniugate se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Svolgimento

Matrici coniugate hanno lo stesso polinomio caratteristico.
Viceversa, supponiamo $\operatorname{car} A = \operatorname{car} B = x^2 + k_1 x + k_0$.
Poichè A non è scalare, non può essere $t = 2$, $d_1(x) = d_2(x) = x - k$.
Quindi $t = 1$ e l'unico invariante di similaritá di A é $d_1(x) = \operatorname{car} A$.
Analogamente B ha un unico invarianti di similaritá che é $\operatorname{car} B$.
Dall'ipotesi $\operatorname{car} A = \operatorname{car} B$ segue che A, B hanno gli stessi invarianti di similaritá, quindi sono coniugate. La loro forma canonica razionale é

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -k_0 \\ 1 & -k_1 \end{pmatrix}.$$

Quindi sono coniugate.

4.3 Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
1) Si trovi la forma canonica razionale C di A;

2) si mostri che

$$\mathcal{B} = \{e_1, Ae_1\}$$

è una base di $\mathbb{K}^2$ e che la matrice di μ_A rispetto $\mathcal{B}$ é C;

3) si trovi la matrice di passaggio P dalla base canonica a $\mathcal{B}$ e si verifichi che

$$P^{-1}AP = C.$$

Svolgimento

1) Poichè A non è scalare, si ha $t = 1$, $d_1(x) = \operatorname{car}(A) = x^2 - 6x$.

In particolare $A^2-6A=0$, da cui $A^2=6A$. Inoltre $C=\begin{pmatrix}0&0\\1&6\end{pmatrix}$.

2) I due vettori $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $Ae_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti (verificarlo !), quindi $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{K}^2$. Da

$$A\,(Ae_1)=A^2e_1=6\,(Ae_1)$$

si deduce che la matrice di μ_A rispetto $\mathcal{B}$ è C.

3) $P=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$, $P^{-1}AP=C$.

4.5 Si dia un esempio di due matrici non scalari A,B di $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{K})$ che hanno lo stesso polinomio caratteristico, ma non sono coniugate.

Svolgimento

$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

A ha sequenza di invarianti di similaritá x,x^2.

B ha sequenza di invarianti di similaritá x^3.

Ne segue che non sono coniugate, pur avendo lo stesso polinomiuo caratteristico x^3. (Si noti che sono due forme canoniche razionali !).

4.6 In $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ si dica se sono coniugate le matrici:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-10&-9\\-1&16&14\end{pmatrix}.$$

Svolgimento

$\mathrm{car}\,A=\mathrm{car}\,B=\mathrm{car}\,D=x(x-2)^2$.

$A^2-2A=0$ implica $t=2$, $d_1(x)=x-2$, $d_2(x)=x(x-2)=x^2-2x$.

$B^2-2B=0$ implica $t=2$, $d_1(x)=x-2$, $d_2(x)=x(x-2)=x^2-2x$.

$D^2-2D\neq=0$ implica $t=1$, $d_1(x)=x(x-2)^2$.

A e B sono coniugate e hanno forma canonica razionale $C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&1&2\end{pmatrix}$

D non è coniugata ad A e ha forma canonica razionale $C=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-4\\0&1&4\end{pmatrix}$

4.7 1) Si trovi la forma canonica razionale C di $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2) si domostri che $\mathcal{B} = \{e_2, e_1, Ae_1\}$ è una base di $\mathbb{K}^3$ e che la matrice di μ_A rispetto $\mathcal{B}$ é C;

3) si trovi la matrice di passaggio P dalla base canonica a $\mathcal{B}$ e si verifichi che $P^{-1}AP = C$.

Svolgimento

1) Poichè A non è scalare, si ha $t \leq 2$. Calcoliamo car(A).

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -4 \\ -2 & x-3 & 4 \\ 1 & 0 & x-5 \end{pmatrix} = (x-1)(x-3)(x-5) + 4(x-3) = (x-3)^3.$$

Da $(A - 3I)^2 = 0$ si conclude $t = 2$, $d_1(x) = x - 3$, $d_2(x) = (x-3)^2$,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2) I tre vettori

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti (verificarlo !), quindi $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{K}^3$.
Ricordando che $(A - 3I)^2 = 0$, ossia $A^2 = 6A - 9I$, si ha:

$$Ae_2 = 3e_2, \quad A\,(Ae_1) = A^2 e_1 = 6\,(Ae_1) - 9e_1.$$

Concludiamo che la matrice di μ_A rispetto $\mathcal{B}$ è C.

3)
$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = C$.

4.8 Una matrice $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{K})$ abbia un unico invariante di similaritá

$$d_1(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + x^3.$$

Si dimostri che esiste $v \in \mathbb{K}^3$ tale che $\mathcal{B} = \left\{v,\ Av,\ A^2 v\right\}$ é una base di $\mathbb{K}^3$.

Svolgimento

La forma canonica razionale di A è

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k_0 \\ 1 & 0 & -k_1 \\ 0 & 1 & -k_2 \end{pmatrix}.$$

Poiché A é coniugata a C, esiste P tale che $P^{-1}AP = C$.

Posto $v := Pe_1$, mostriamo che $\{v, Av, A^2v\}$ é indipendente.

A tale scopo sia

$$0 = av + b(Av) + c\left(A^2v\right) = a\left(Pe_1\right) + b(APe_1) + c\left(A^2Pe_1\right).$$

Moltiplicando per P^{-1} e notando che $P^{-1}A^2P = \left(P^{-1}AP\right)^2$:

$$0 = ae_1 + b\left(Ce_1\right) + c\left(C^2e_1\right) = ae_1 + be_2 + ce_3.$$

Si conclude $a = b = c = 0$.

4.9 Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$.

1) Si trovi un vettore $v \in \mathbb{Q}^3$ tale che $\mathcal{B} = \{v,\ Av,\ A^2v\}$ sia una base di $\mathbb{Q}^3$;

2) si verifichi che la matrice di μ_A risp. $\mathcal{B}$ è la forma can. razionale C di A;

3) si trovi la matrice di passaggio P dalla base canonica a $\mathcal{B}$ e si verifichi che $P^{-1}AP = C$.

Svolgimento

1) $\mathrm{Car}(A) = x(x-1)(x-2)$ non ha fattori multipli. Quindi A un unico invariante di similaritá $d_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. In particolare $A^3 = 3A^2 - 2A$.

Posto $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ si ha $Av = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A^2v = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix}$ e i tre vettori sono linearmente indipendenti (verificarlo!). Pertanto

$$\mathcal{B} = \{v,\ Av,\ A^2v\}$$

é una base di $\mathbb{Q}^3$.

2) $A\left(A^2v\right) = A^3v = (3A^2 - 2A)v = -2(Av) + 3\left(A^2v\right)$.

Segue che la matrice di μ_A rispetto a $\mathcal{B}$ é:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3. \end{pmatrix}.$$

3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 1 & 6 & 16 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{4}{3} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{12} & 0 & \frac{-1}{12} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = C$.

4.10 Si trovi la forma canonica razionale C della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q}).$$

Svolgimento

Se fosse $t = 2$ la matrice A annullerebbe un polinomio monico, di grado 2, a coefficienti in $\mathbb{K}$. Ma $A^2 + k_1 A + k_0 A^0 =$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -5 & 9 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_1 & 0 & k_1 \\ -k_1 & 3k_1 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_0 & 0 & 0 \\ 0 & k_0 & 0 \\ 0 & 0 & k_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 1 & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

non é mai la matrice nulla.

Si conclude $t = 1$, $d_1(x) = \text{car } A = x^3 - 5x^2 + 6x + 1$,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

4.11 Si dimostri che una matrice $A \in \mathrm{Mat_n}(\mathbb{K})$ è scalare se e solo se ha n invarianti di similaritá.

Svolgimento

Supponiamo che A abbia n invarianti di similaritá. Dato che i loro gradi sono ≥ 1 e la loro somma è n, essi devono avere tutti grado 1. Poichè sono monici e ciascuno divide il successivo, devono essere tutti uguali a $x - k$, per un opportuno $k \in \mathbb{K}$. Pertanto la forma canonica razionale di A è la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} k & & \\ & \dots & \\ & & k \end{pmatrix} = kI.$$

Poichè A è coniugata a C, esiste P tale che $A = P^{-1}CP$. Ne segue che

$$A = P^{-1}CP = P^{-1}kIP = kI = C$$

è scalare.

Viceversa, supponiamo che $A = kI$ sia scalare. Siccome kI è una forma canonica razionale, e A è coniugata a se stessa, A coincide con la propria forma canonica razionale. Chiaramente i suoi invarianti di similaritá sono n, tutti uguali a $x - k$.

4.12 Sia $A \in \mathrm{Mat_n}(\mathbb{K})$. Si dimostri che A ha un unico invariante di similaritá se e solo se esiste $v \in \mathbb{K}^n$ tale che $\{v, Av, \dots, A^{n-1}v\}$ é indipendente.

Svolgimento

Supponiamo che esista $v \in \mathbb{K}^n$ tale che $\mathcal{B} := \{v, Av, \dots A^{n-1}v\}$ sia indipendente, quindi una base di $\mathbb{K}^n$. Ne segue che l'insieme

$$\mathcal{B} \cup \{A^n v\}$$

é dipendente. Esistono quindi dei coefficienti, non tutti nulli, tali che:

$$h_0 v + h_1 (Av) + \cdots + h_n (A^n v) = 0.$$

Sicuramente $h_n \neq 0$, per l'indipendenza di $\mathcal{B}$. Dividendo per h_n e ponendo $k_i := h_n^{-1} h_i$ si ottiene:

$$A^n = -\sum_{i=0}^{n-1} k_i A^i.$$

In particolare

$$A\left(A^{n-1}v\right) = -\sum_{i=0}^{n-1} k_i \left(A^i v\right)$$

da cui si deduce che la matrice di μ_A rispetto a $\mathcal{B}$ é la matrice companion $C_{d_1(x)}$, dove

$$d_1(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} k_i x^i.$$

Poiché la matrice di μ_A rispetto alla base canonica di $\mathbb{K}^n$ é A, si conclude che $C_{d_1(x)}$ é coniugata ad A, quindi é la sua forma canonica razionale. Pertanto $d_1(x)$ è l'unico invariante di similaritá di A.

Viceversa, supponiamo che A abbia un unico fattore invariante $d_1(x)$.
Ne segue che A è coniugata alla matrice companion $C := C_{d_1(x)}$.
Sia P tale che $P^{-1}AP = C$. L'insieme

$$\{e_1, Ce_1, \dots, C^{n-1}e_1\} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

é una base di $\mathbb{K}^n$. Quindi anche

$$\{Pe_1, PCe_1, \dots, PC^{n-1}e_1\} = \{Pe_1, Pe_2, \dots, Pe_n\}$$

é una base. Ora, da $AP = PC$ segue facilmente, per induzione su k, che $A^kP = PC^k$ per ogni $k \geq 1$. Si conclude che

$$\left\{(Pe_1), PCe_1, \ldots, PC^{n-1}e_1\right\} = \left\{Pe_1, A(Pe_1), \ldots, A^{n-1}(Pe_1)\right\}$$

é una base. In particolare é indipendente. Posto $v := Pe_1$ si ha l'asserto.

4.13 Si determinino tutte le forme canoniche razionali di $\mathrm{Mat}_6(\mathbb{K})$ il cui polinomio caratteristico é $d(x) = x^6 - x^5 - 18x^4 + 14x^3 + 61x^2 - 93x + 36$.

Svolgimento

Fattorizzando si ha $d(x) = (x-1)^3(x+3)^2(x-4)$.
Da $d_1(x)^t$ divide $d_t(x)$ segue $t \leq 3$.
Le possibili sequenze di fattori invarianti sono:

$(x-1)^3(x+3)^2(x-4)$		
$(x-1)$,	$(x-1)^2(x+3)^2(x-4)$	
$(x+3)$	$(x-1)^3(x+3)(x-4)$	
$(x-1)(x+3)$	$(x-1)^2(x+3)(x-4)$	
$(x-1)$,	$(x-1)$	$(x-1)(x+3)^2(x-4)$
$(x-1)$,	$(x-1)(x+3)$	$(x-1)(x+3)(x-4)$

Le corrispondenti forme canoniche razionali sono:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 93 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -61 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & -57 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 18 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 35 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & -32 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & & & & \\ 1 & -2 & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & 12 \\ & & 1 & 0 & 0 & -23 \\ & & 0 & 1 & 0 & 9 \\ & & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & -36 \\ & & 1 & 0 & 0 & 21 \\ & & 0 & 1 & 0 & 17 \\ & & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & -3 & & & \\ & 1 & 4 & & & \\ & & & 0 & 0 & 12 \\ & & & 1 & 0 & -19 \\ & & & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

4.14 Sia $A \in \mathrm{Mat_n}(\mathbb{Q})$ e sia $d(x) = \mathrm{car}A$. Si dimostri che se

$$\mathrm{M.C.D.}\left(d(x), d'(x)\right) = 1,$$

allora A é coniugata alla matrice companion $C_{d(x)}$.

Svolgimento

Si tratta di dimostrare che A ha un unico invariante di similaritá, ossia $t = 1$.
Se fosse $t \geq 2$, il polinomio $d(x) = \mathrm{car} A$ sarebbe divisibile per $d_1(x)^2$. Pertanto ogni radice complessa α di $d_1(x)$ sarebbe radice di $d(x)$ avente molteplicitá almeno due. Ma $d(x)$, essendo coprimo con $d'(x)$, non ha radici multiple.

4.15 Si dimostri che tutte le matrici di $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q})$ il cui polinomio caratteristico é x^4-4x+5 sono coniugate.

Svolgimento

Poiché $\mathrm{M.C.D}(x^4 - 4x + 5, 4x^3 - 4) = \mathrm{M.C.D}(x^4 - 4x + 5, x^3 - 1) = 1$, per l'esercizio precedente tutte queste matrici hanno un unico invariante di similaritá $d_1(x) = x^4 - 4x + 5$. Prtanto sono tutte coniugate alla matrice companion C_{x^4-4x+5}, e quindi sono coniugate fra loro.

4.16 Si dimostri che ogni matrice e la sua trasposta hanno lo stesso polinomio minimo. Se ne deduca che ogni matrice companion é coniugata alla sua trasposta. Si concluda che gni matrice é coniugata alla sua trasposta.

Svolgimento

Sia $A \in \mathrm{Mat_n}(\mathbb{K})$. Per ogni $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ si ha $\big(f(A^T) = f(A)^T\big)$. Infatti

$$k_m \left(A^T\right)^m + \cdots + k_1 A^T + k_0 I \; = \; (k_m A^m + \cdots + k_1 A + k_0 I)^T \, .$$

Ne segue $f(A) = 0$ se e solo se $f(A^T) = 0$, ossia A e A^T hanno lo stesso ideale annullatore in $\mathbb{K}[x]$. Poiché il polinomio minimo di una matrice é il generatore del suo ideale annullatore, si conclude che A e A^T hanno lo stesso polinomio minimo.
Sia $C_{d(x)} \in \mathrm{Mat_m}(\mathbb{K})$ una matrice companion. Essa ha un unico invariante di similaritá $d(x)$, di grado m, che coincide con il suo polinomio minimo. Ne segue che C^T ha $d(x)$ come polinomio minimo. Avendo grado m è necessariamente l'unico invariante di similaritá di C^T. Ne segue che la forma canonica razionale di C^T é C.
La conclusione che ogni matrice A é coniugata alla sua trasposta si ottiene considerando la forma canonica razionale di A e ragionando per induzione sul numero dei suoi invariante di similaritá.

4.17 Si trovino le forme canoniche razionali di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}_2)$.

Svolgimento

Elencando tutte le possibili sequenze di invarianti di similaritá si ha:
x^2, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; x, x, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; x^2+1, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
$x+1, x+1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; x^2+x+1 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.18 Si trovi la forma canonica razionale C di $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 8 & -16 & 1 \end{pmatrix}$, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}^3$ tale che la matrice di μ_A rispetto $\mathcal{B}$ sia C e P tale che $P^{-1}AP = C$.

Svolgimento

$A^2 = I$. Poiché A non é scalare, il polinomio minimo di A é $x^2 - 1$.
Essendo car $A = (x-1)\left(x^2-1\right)$ la sequenza degli invarianti di similaritá di A é $(x-1), (x^2-1)$. Pertanto

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{B} = \{e_3, e_1, Ae_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$.
$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = C$.

4.19 Si trovi la forma canonica razionale C di $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}^4$ tale che la matrice di μ_A rispetto $\mathcal{B}$ sia C e P tale che $P^{-1}AP = C$.

Svolgimento

$A^2 - 2A - I = 0$. Poiché A non é scalare, il polinomio minimo di A é $x^2 - 2x - 1$. Essendo car $A = \left(x^2 - 2x - 1\right)^2$ la sequenza degli invarianti di similaritá di A é $x^2 - 2x - 1, x^2 - 2x - 1$. Pertanto $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{B} = \{e_1, Ae_1, e_2, Ae_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.20 Data una matrice a blocchi $A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$, siano $m_1(x)$ il polinomio minimo di A_1, $m_2(x)$ il polinomio minimo di A_2. Detto $m(x)$ il polinomio minimo di A si dimostri che $m(x)$ é il m.c.m. di $m_1(x)$ e $m_2(x)$.

Svolgimento

Considerando somme e prodotti di matrici a blocchi si ha:

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & \\ & f(A_2) \end{pmatrix}, \quad \forall\ f(x) \in \mathbb{K}[x]. \tag{0.1}$$

Da $m(A) = 0$ segue $m(A_1) = 0$ (in virtú di (0.1)), da cui $m_1(x)$ divide $m(x)$. Analogamente $m_2(x)$ divide $m(x)$. D'altra parte, sia $g(x)$ un multiplo comune di $m_1(x)$ e $m_2(x)$. Da $m_1(A_1) = 0$ segue $g(A_1) = 0$. Analogamente $g(A_2) = 0$. In virtú di (0.1) si ha $g(A) = 0$, da cui segue che $m(x)$ divide $g(x)$.

4.21 Data $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ si verifichi che i sottospazi

$$V_1 := \langle e_1, e_4 \rangle, \ V_2 := \langle e_2, e_3 \rangle$$

sono μ_A-invarianti e si scrivano le matrici A_1 e A_2 delle restrizioni di μ_A a V_1 e V_2. Si scriva la matrice B di μ_A rispetto $\{e_1, e_4, e_2, e_3\}$ e si trovi P tale che $P^{-1}AP = B$. Si trovi la forma canonica razionale C di A.

Svolgimento

$$\begin{cases} \mu_A(e_1) = 3e_1 + e_4 \\ \mu_A(e_4) = -2e_1 - e_4 \end{cases} \implies \mu_A(V_1) \leq V_1 \implies A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \mu_A(e_2) = e_3 \\ \mu_A(e_3) = -e_2 + 3e_3 \end{cases} \implies \mu_A(V_2) \leq V_2 \implies A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

4.22 Data $A \in \mathrm{Mat_n}(\mathbb{K})$ e posto $V := \mathbb{K}^n$, sia $V = U \dot{+} W$, con U, W sottospazi μ_A-invarianti. Si dimostri che, per ogni autovalore λ di A:

$$V_\lambda \ = \ U_\lambda \dot{+} W_\lambda,$$

dove V_λ, U_λ e W_λ indicano gli autospazi relativi a λ di μ_A e delle sue restrizioni a U e W rispettivamente. In particolare:

$$\dim(V_\lambda) \ = \ \dim(U_\lambda) + \dim(W_\lambda).$$

Svolgimento

Per verificare che $V_\lambda = U_\lambda + W_\lambda$, basta mostrare l'inclusione $V_\lambda \leq U_\lambda + W_\lambda$.
A tale scopo, sia $v \in V_\lambda$, ossia $Av = \lambda v$. Per ipotesi esistono $u \in U$, $w \in W$ tali che $v = u + w$. Ne segue

$$Av = Au + Aw, \quad \lambda v = \lambda u + \lambda w,$$

Poichè U e W sono μ_A-invarianti, $Au \in U$ e $Aw \in W$. Per l'unicità della scrittura di $\lambda v = Av$ come somma di un elemento di U e di uno di W si ha

$$Au = \lambda u, \ Aw = \lambda w.$$

Pertanto $u \in U_\lambda$ e $w \in W_\lambda$. Infine $U_\lambda \cap W_\lambda \leq U \cap W = (0_V\}$.

4.23 Siano α, β due autovalori distinti di $A \in \mathrm{Mat_n}(\mathbb{K})$. Posto $V := \mathbb{K}^n$ si dimostri che $V_\alpha \cap V_\beta = \{0_V\}$.

Svolgimento

Sia $v \in V_\alpha \cap V_\beta$, ossia $Av = \alpha v = \beta v$. Ne segue $(\alpha - \beta)v = 0_V$. Moltiplicando per $(\alpha - \beta)^{-1}$ si trova $v = 0_V$.

4.24 Si calcolino autovalori e autospazi di ciascuna delle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento

I polinomi caratteristici di A e B sono rispettivamente:

$$x^2, x^3.$$

Quindi A e B hanno solo l'autovalore 0.

L'autospazio di A relativo a 0 si ottiene risolvendo il sistema

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{cases}0x+0y=0\\1x+0y=0\end{cases},\quad x=0.$$

Quindi l'autospazio di A relativo a 0 è $\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ e ha dimensione 1.

L'autospazio di B relativo a 0 si ottiene risolvendo il sistema

$$B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{cases}0x+0y+0z=0\\1x+0y+0z=0\\1y+0z=0\end{cases},\quad \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$$

Quindi l'autospazio di B relativo a 0 è $\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ e ha dimensione 1.

4.25 Tenendo presente l'esercizio **4.22**, si calcolino autovalori e autospazi di ciascuna delle matrici:

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Svolgimento

I polinomi caratteristici di D e E sono rispettivamente:

$$x^4, x^5.$$

Quindi D e E hanno solo l'autovalore 0.

I sottospazi $U=\langle e_1,e_2\rangle$ e $W=\langle e_3,e_4\rangle$, sono μ_D-invarianti. Chiaramente

$$V=\mathbb{K}^4 \ = \ U\dot{+}W.$$

Siano V_0 l'autospazio di D relativo a 0, U_0, W_0 gli autospazi relativo a 0 della restrizione di μ_D a U e W rispettivamente. Per l'Esercizio **4.22**

$$V_0=U_0\dot{+}W_0.$$

Dall' esercizio precedente segue che V_0 ha dimensione $1+1=2$. Essendo $De_2=0e_2$, $De_4=0e_4$, si conclude che l'autospazio di D relativo a 0 concide con $\langle e_2,e_4\rangle$.

I sottospazi $U=\langle e_1,e_2\rangle$ e $W=\langle e_3,e_4,e_5\rangle$, sono μ_E-invarianti. Sia V_0 l'autospazio di E relativo a 0. Con ragionamenti analoghi ai precedenti si vede che V_0 ha dimensione

$1+1=2$. Essendo $De_2 = 0e_2$, $De_5 = 0e_5$, si conclude che l'autospazio di E relativo a 0 concide con $\langle e_2, e_5\rangle$.

4.26 Si calcolino le forme canoniche di Jordan J_1 e J_2 delle seguenti matrici:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si dimostri inoltre che le matrici

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

sono coniugate. Infine si calcolino gli autovalori e gli autospazi di C e di J e si determini P tale che $P^{-1}CP = J$.

Svolgimento

C_1 è la matrice companion di $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$.

C_2 è la matrice companion di $x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2$.

Quindi:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

C_1 è coniugata a J_1, quindi esiste P_1 tale che $P_1^{-1}C_1P_1 = J_1$.

C_2 è coniugata a J_2, quindi esiste P_2 tale che $P_2^{-1}C_2P_2 = J_2$.

Detta P la matrice diagonale a blocchi $\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$ si ha:

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} P_1^{-1}C_1P_1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1}C_2P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} = J.$$

Cerchiamo P_1 tale che $P_1^{-1}C_1P_1 = J_1$, equivalentemente $C_1P_1 = P_1J_1$. Da:

$$\begin{cases} C_1\,(P_1e_1) & = P_1(J_1e_1) = 2\,(P_12e_1) \\ C_1\,(P_1e_2) & = P_1(J_1e_2) = -\,(P_1e_2)) \end{cases}$$

vediamo che le colonne di P_1 devono essere autovettori di C_1 relativi a $2, -1$. Quindi $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Notando che $P_1^{-1} = \frac{1}{3}P_1$ si verifica direttamente che $P_1^{-1}C_1P_1 = J_1$.

Analogamente

P_2e_1 si trova imponendo che sia autovettore di C_2 relativo a 2.

P_2e_3 si trova imponendo che sia autovettore di C_2 relativo a -1.

P_2e_2 si trova imponendo che sia $C_2(P_2e_2) = -P_2e_2 + Pe_3$.

$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Notando che

$$P_2^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

si verifica direttamente che $P_2^{-1}C_2P_2 = J_2$. Concludendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.27 Si dica se le seguenti forme di Jordan in $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ sono coniugate.

$$J_1 := \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad J_2 := \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

.

Svolgimento

Sì , sono coniugate. Giustificazione della risposta.

I modo: Le due matrici hanno gli stessi divisori elementari $x+5$, $x-7$.

II modo

Cerchiamo una base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ rispetto alla quale la matrice di μ_{J_1} è J_2.

$$\begin{cases} \mu_{J_1}(v_1) = 7v_1 \\ \mu_{J_1}(v_2) = -5v_2 \end{cases}$$

$v_1 = e_2$, $v_2 = e_1$. La matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è

$$P = \left(\ e_2 \mid e_1 \ \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$P^{-1}J_1P = J_2$.

4.28 Si dica se le seguenti forme di Jordan in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ sono coniugate.

$$J_1 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad J_2 := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad J_3 := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento

J_1 e J_2 hanno gli stessi divisori elementari, $x+2, (x-3)^2$. Quindi sono coniugate.

J_3 ha divisori elementari $x+2$, $x-3$, $x-3$, quindi non è coniugata alle precedenti.

Osservazione Se si vuole ottenere una matrice P che coniuga J_1 a J_2 si cerca una base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ rispetto alla quale la matrice di μ_{J_1} è J_2.

$$\begin{cases} \mu_{J_1}(v_1) = -2v_1 \\ \mu_{J_1}(v_3) = 3v_3 \\ \mu_{J_1}(v_2) = 3v_2 + v_3 \end{cases}$$

$v_1 = e_3$, $v_2 = e_1$, $v_3 = e_2$. La matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è

$$P = \left(\; e_3 \mid e_1 \mid e_2 \; \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$P^{-1}J_1P = J_2$.

4.29 Data $A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$, si trovino la sua forma canonica razionale C e una matrice P tale che $P^{-1}AP = C$.

Svolgimento

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 1 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.30 Si dimostri che tutte le matrici di $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ il cui polinomio caratteristico è x^3+3x-1 sono coniugate.

Svolgimento

Posto $f(x) = x^3 + 3x - 1$, risulta $f'(x) = 3x^2 + 3$. Poichè

$$\mathrm{MCD}(x^3 + 3x - 1, 3x^2 + 3) = \mathrm{MCD}(x^3 + 3x - 1, x^2 + 1) = 1$$

$f(x)$ non ha radici multiple. Quindi $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, dove α, β, γ sono le sue 3 radici distinte. Si conclude che ogni matrice di $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ il cui polinomio caratteristico è x^3+3x-1 ha un solo fattore invariante $d_1(x) = x^3+3x-1$ e ha quindi forma canonica razionale

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le forme di Jordan, coniugate fra loro e a C sono:

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \gamma & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta & 0 & 0\\ 0 & \gamma & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}.$$

4.31 Data $A = \begin{pmatrix}8 & 12 & -24\\ -1 & 0 & 4\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$, si trovi la forma normale di $xI - A$ in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{C}[\mathrm{x}])$ e si deduca la forma canonica razionale di A (si veda il Teorema **5.6** delle Dispense).

Svolgimento

$$xI - A = \begin{pmatrix}x-8 & -12 & 24\\ 1 & x & -4\\ -1 & -2 & x+2\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & x-2 & 0\\ 0 & 0 & (x-2)^2\end{pmatrix} = \text{formanormale}.$$

Per il Teorema 5.6 i invarianti di similaritá di A sono

$$d_1(x) = x-2,\ d_2(x) = (x-2)^2.$$

Si conclude che la forma canonica razionale di A è $C = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

4.32 Si giustifichi che la forma normale di A nell'esercizio precedente è quella indicata.

Svolgimento

$$xI - A \equiv \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x-8 & -12 & 24\\ 1 & x & -4\\ -1 & -2 & x+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & x & -4\\ -1 & -2 & x+2\\ x-8 & -12 & 24\end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 8-x & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & x & -4\\ -1 & -2 & x+2\\ x-8 & -12 & 24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & x & -4\\ 0 & x-2 & x-2\\ 0 & -x^2+8x-12 & 4x-8\end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x-6 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & x & -4\\ 0 & x-2 & x-2\\ 0 & (x-2)(-x+6) & 4x-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & x & -4\\ 0 & x-2 & x-2\\ 0 & 0 & (x-2)^2\end{pmatrix} \equiv$$

$$\begin{pmatrix}1 & x & -4\\ 0 & x-2 & x-2\\ 0 & 0 & (x-2)^2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & -x & x+4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & x-2 & 0\\ 0 & 0 & (x-2)^2\end{pmatrix} = \text{formanormale}.$$

E' essenziale notare che:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C}[\mathrm{x}]),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 8-x & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -8+x & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C}[\mathrm{x}]),$$

ecc....

4.33 Si trovi P tale che $P^{-1}AP = B$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

R è unica ?

Svolgimento

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 1 & 1/3 & 4/3 & -1/6 \end{pmatrix}.$$

Per esempio anche $R = AP$ va bene. Infatti $R^{-1}AR = P^{-1}A^{-1}AAP = P^{-1}AP = B$.