Riempiamo il piano (in modo strano)

Maurizio Paolini (paolini@dmf.unicatt.it)

Università Cattolica di Brescia

Supermath, agosto 2011

Cosa intendo fare...

- Riempiamo il piano in modo “facile” (periodico)
- Animazione “escher-contrast”
- Animazione “rep-tiles” (Roberto Giunti)
- Riempiamo il piano in modo “strano” (aperiodico)
- Animazione **Frecce e aquiloni**, (M. Paolini e A. Musesti, Univ. Catt.)
- Ruota di carro, batman, asterix e i decapodi
- Animazione **Decapodi** (M. Paolini)
- Esercizi

Materiale:

- DVD omaggio
- il bidone “kites and darts”

A proposito del dvd

Tutto quello che c'è nel DVD è $\boxed{\text{liberamente utilizzabile}}$ e $\boxed{\text{duplicabile}}$ (licenza "Creative Commons").

Ci trovate (se utilizzato con un lettore DVD):

- Animazione "Frecce e aquiloni nel cielo della matematica" (in italiano, inglese, francese + sottotitoli in altre lingue)
- Sequenze "rep-tiles" di Roberto Giunti (7 animazioni), nel "materiale extra"
- Animazione "decapodi", negli extra

Se utilizzato da computer trovate:

- Tutte le animazioni in risoluzione originale (1280x720) in formato "webm"
- Breve documento illustrativo di Andrea Centomo
- Testo conferenza (Udine 2010) molto simile a questa di oggi

La torta di compleanno

La mamma ha preparato questa torta di compleanno:

e la vuole dividere in 6 parti identiche, come può fare? Problema "rubato" a Caldè.

La torta di compleanno

La mamma ha preparato questa torta di compleanno:

e la vuole dividere in 6 parti identiche, come può fare? Problema "rubato" a Caldè.
Potete pensarci, ma comunque qui vogliamo parlare d'altro!

La torta di compleanno (2)

Un tizio un po' strano ha comprato tante piastrelle come questa:

e vuole usarle per pavimentare il suo salotto. Come può fare?

La torta di compleanno (2)

Un tizio un po' strano ha comprato tante piastrelle come questa:

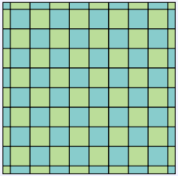
e vuole usarle per pavimentare il suo salotto. Come può fare?
Ovviamente non ci riesce!

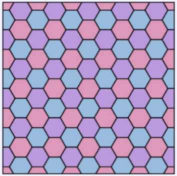
Piastrelle più normali...

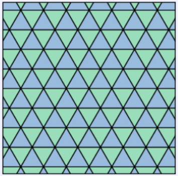
Se avesse (più saggiamente) comprato piastrelle quadrate, oppure esagonali, oppure triangolari, sarebbe stato più semplice:

Piastrelle più normali...

Se avesse (più saggiamente) comprato piastrelle quadrate, oppure esagonali, oppure triangolari, sarebbe stato più semplice:

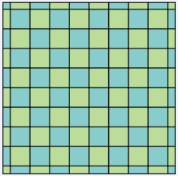


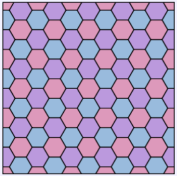


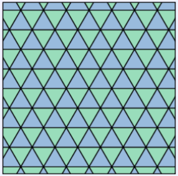


Piastrelle più normali...

Se avesse (più saggiamente) comprato piastrelle quadrate, oppure esagonali, oppure triangolari, sarebbe stato più semplice:



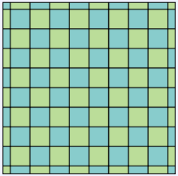


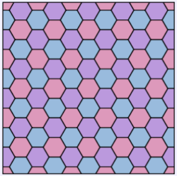


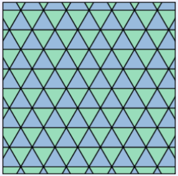
Secondo voi si possono usare altri poligoni regolari, come il pentagono o l'ottagono?

Piastrelle più normali...

Se avesse (più saggiamente) comprato piastrelle quadrate, oppure esagonali, oppure triangolari, sarebbe stato più semplice:







Secondo voi si possono usare altri poligoni regolari, come il pentagono o l'ottagono?

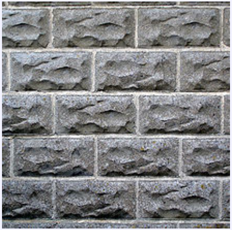
Perché no?

Piastrelle più normali (2)

Usando altre forme ci si può sbizzarrire, ad esempio con rettangoli $2x1$:

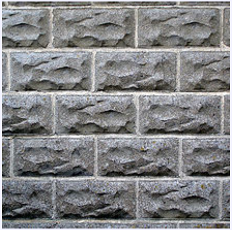
Piastrelle più normali (2)

Usando altre forme ci si può sbizzarrire, ad esempio con rettangoli $2x1$:



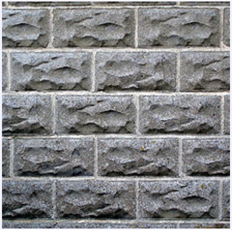
Piastrelle più normali (2)

Usando altre forme ci si può sbizzarrire, ad esempio con rettangoli 2x1:



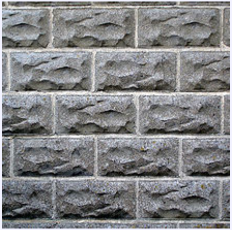
Piastrelle più normali (2)

Usando altre forme ci si può sbizzarrire, ad esempio con rettangoli 2x1:



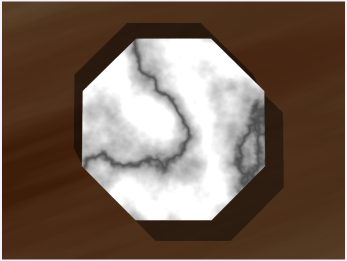
Piastrelle più normali (2)

Usando altre forme ci si può sbizzarrire, ad esempio con rettangoli $2x1$:



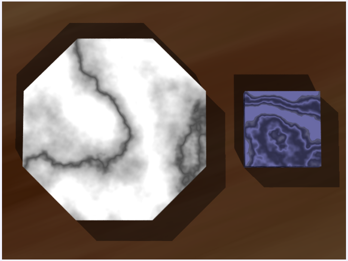
e si possono immaginare molte altre configurazioni, provate a chiedere ad un piastrellista...

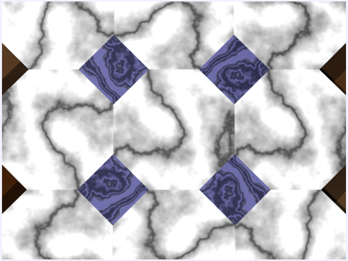
Si può usare un ottagono?



No! però...

Si può usare un ottagono?





No! però...
se aggiungo un quadrato la situazione cambia.

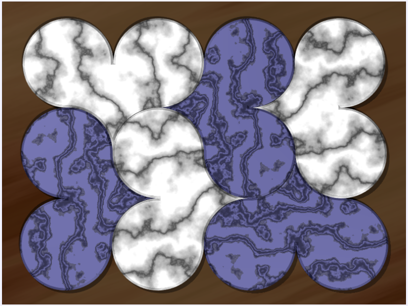
Altre forme (1)

Ecco una forma un po' strana:

Qualcosina si può fare immaginando di incastrare la punta di un "cuore" nell'incavo di un altro "cuore"...

Altre forme (1)

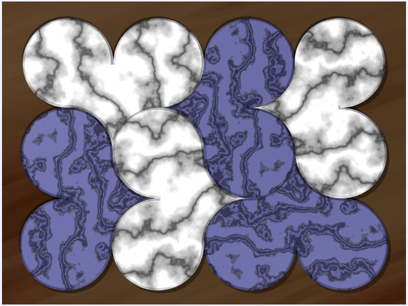
Ecco una forma un po' strana:



Qualcosina si può fare immaginando di incastrare la punta di un "cuore" nell'incavo di un altro "cuore"...
Sorpresa!

Altre forme (1)

Ecco una forma un po' strana:

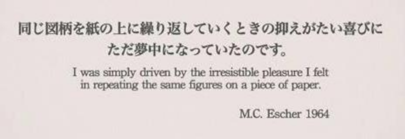


Qualcosina si può fare immaginando di incastrare la punta di un "cuore" nell'incavo di un altro "cuore"...

Sorpresa!

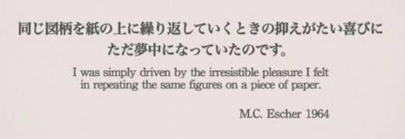
Ma purtroppo non si può riempire tutto il piano.

I disegni di Escher

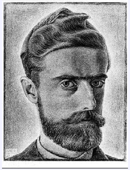


"Ero trascinato dal piacere irresistibile che sentivo nel ripetere le stesse figure su un pezzo di carta"
M.C. Escher 1964

I disegni di Escher



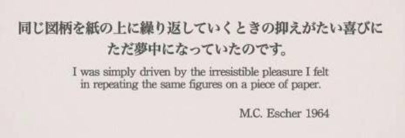
"Ero trascinato dal piacere irresistibile che sentivo nel ripetere le stesse figure su un pezzo di carta"
M.C. Escher 1964



Maurits Cornelis Escher

1898–1972, artista olandese famoso per le sue litografie con figure combacianti riconoscibili

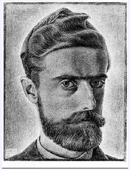
I disegni di Escher


同じ図柄を紙の上に繰り返していくときの抑えがたい喜びに
ただ夢中になっていたのです。

I was simply driven by the irresistible pleasure I felt
in repeating the same figures on a piece of paper.

M.C. Escher 1964

"Ero trascinato dal piacere irresistibile che sentivo nel ripetere le stesse figure su un pezzo di carta"
M.C. Escher 1964



Maurits Cornelis Escher

1898–1972, artista olandese famoso per le sue litografie con figure combacianti riconoscibili

Animazione di produzione giapponese utilizzata durante una mostra su Escher (Verona, marzo 2009). Illustra alcune delle più famose opere dell'artista Olandese.

I disegni di Escher (2)

Uno dei temi più noti è quello dei riempimenti periodici del piano:

I disegni di Escher (2)

Uno dei temi più noti è quello dei riempimenti periodici del piano:

Uno dei temi più noti è quello dei riempimenti periodici del piano:

Animazione "escher-contrast"

Ne vediamo solo una parte...
[Durata 3 minuti circa]

Nei disegni di Escher la forma dei tasselli (in genere animali reali o fantastici) è accuratamente studiata in modo da permettere una perfetta corrispondenza come per le tessere di un puzzle.
La matematica (in particolare la teoria dei gruppi) permette di classificare le diverse possibili tassellazioni periodiche dal punto di vista della loro struttura.
Ci sono esattamente **17** possibilità! Le sigle *p*2, *p*3, *pgg*, ... corrispondono alla terminologia introdotta dai cristallografi, la più comune.
Conway ha proposto una classificazione alternativa:

Conway	o	xx	*x	**	632	*632
Cristallogr.	p1	pg	cm	pm	p6	p6m
Conway	333	*333	3*3	442	*442	4*2
Cristallogr.	p3	p3m1	p31m	p4	p4m	p4g
Conway	2222	22x	22*	*2222	2*22	
Cristallogr.	p2	pgg	pmg	pmm	cmm	

Rep-Tiles (Roberto Giunti)

Nei disegni di Escher la forma dei tasselli (in genere animali reali o fantastici) è accuratamente studiata in modo da permettere una perfetta corrispondenza come per le tessere di un puzzle.
La matematica (in particolare la teoria dei gruppi) permette di classificare le diverse possibili tassellazioni periodiche dal punto di vista della loro struttura.
Ci sono esattamente **17** possibilità! Le sigle *p*2, *p*3, *pgg*, … corrispondono alla terminologia introdotta dai cristallografi, la più comune.

Conway ha proposto una classificazione alternativa:

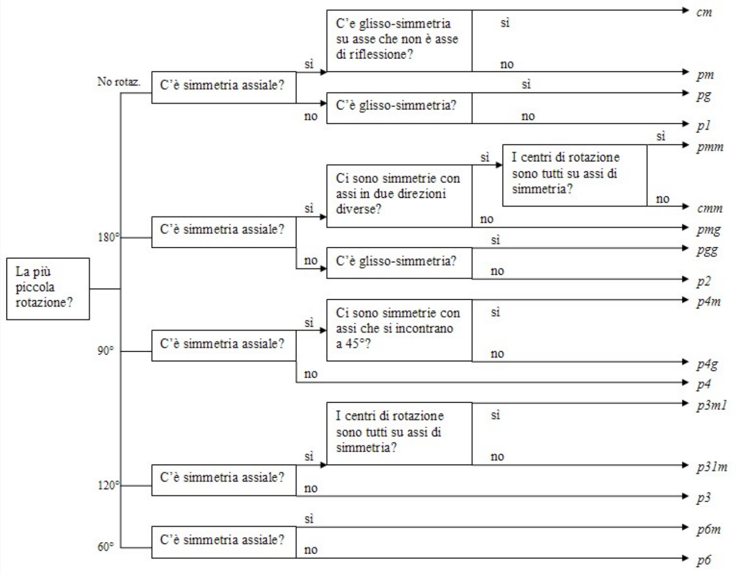
Conway	o	xx	*x	**	632	*632
Cristallogr.	p1	pg	cm	pm	p6	p6m
Conway	333	*333	3*3	442	*442	4*2
Cristallogr.	p3	p3m1	p31m	p4	p4m	p4g
Conway	2222	22x	22*	*2222	2*22	
Cristallogr.	p2	pgg	pmg	pmm	cmm	

Rep-Tiles (Roberto Giunti)

Nei disegni di Escher la forma dei tasselli (in genere animali reali o fantastici) è accuratamente studiata in modo da permettere una perfetta corrispondenza come per le tessere di un puzzle.
La matematica (in particolare la teoria dei gruppi) permette di classificare le diverse possibili tassellazioni periodiche dal punto di vista della loro struttura.
Ci sono esattamente **17** possibilità! Le sigle *p*2, *p*3, *pgg*, ... corrispondono alla terminologia introdotta dai cristallografi, la più comune.
Conway ha proposto una classificazione alternativa:

Conway	o	xx	*x	**	632	*632
Cristallogr.	p1	pg	cm	pm	p6	p6m
Conway	333	*333	3*3	442	*442	4*2
Cristallogr.	p3	p3m1	p31m	p4	p4m	p4g
Conway	2222	22x	22*	*2222	2*22	
Cristallogr.	p2	pgg	pmg	pmm	cmm	

Riconoscere il gruppo giusto

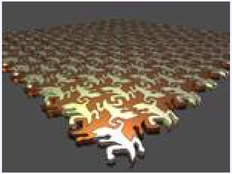


Rep-Tiles è “work in progress”

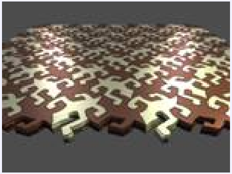
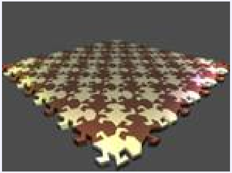
= reptiles + tiles: 7 animazioni corrispondenti a 7 disegni di Escher

= reptiles + tiles: 7 animazioni corrispondenti a 7 disegni di Escher



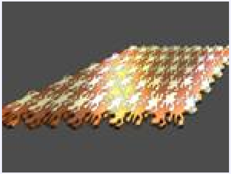


p2
p3
p4

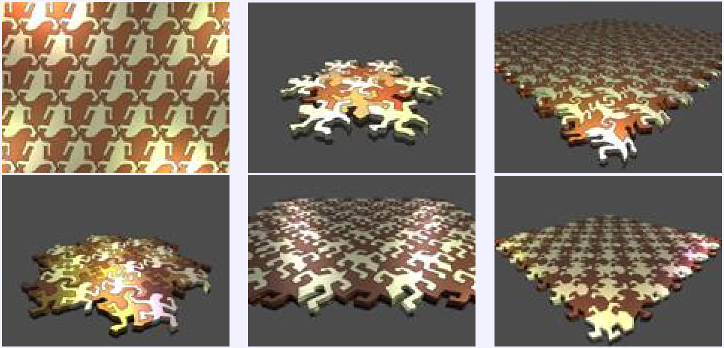
p6
pgg
pg

p2



Rep-Tiles è "work in progress"

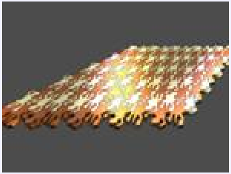
= reptiles + tiles: 7 animazioni corrispondenti a 7 disegni di Escher



p2
p3
p4

p6
pgg
pg

p2



Animazione "Rep-Tiles" (R. Giunti)

Musiche dal *Clavicembalo ben temperato* di Bach
Brano Ipg.avi (Durata 3 minuti)

È facile costruire tassellazioni non periodiche...
Cosa significa invece "**Tassellazione aperiodica**"?

Le tassellazioni di Penrose

È facile costruire tassellazioni non periodiche...
Cosa significa invece "**Tassellazione aperiodica**"?

Tassellazione aperiodica

È un insieme di tasselli (prototasselli) tali che:

1. Con essi è possibile tassellare il piano...
2. Non è possibile farlo in modo periodico!

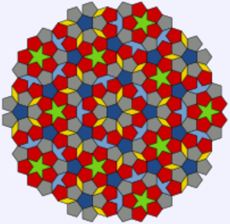
È facile costruire tassellazioni non periodiche...
Cosa significa invece "**Tassellazione aperiodica**"?

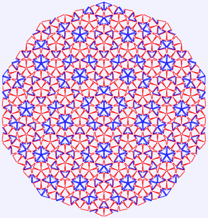
Tassellazione aperiodica

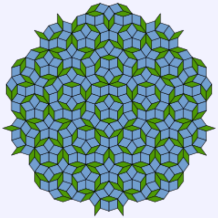
È un insieme di tasselli (prototasselli) tali che:

1. Con essi è possibile tassellare il piano...
2. Non è possibile farlo in modo periodico!

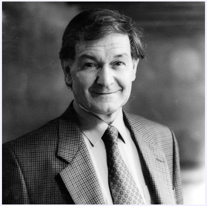
Le più famose sono quelle proposte da Roger Penrose







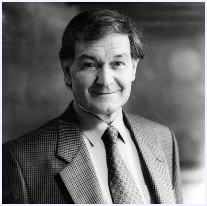
Personaggi



Sir Roger Penrose (1931-)

Fisico e matematico inglese. Contributi nel campo della relatività generale (cosmologia e buchi neri, con Stephen Hawking); filosofo; giochi matematici.

Personaggi



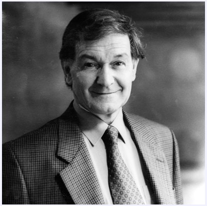
Sir Roger Penrose (1931-)

Fisico e matematico inglese. Contributi nel campo della relatività generale (cosmologia e buchi neri, con Stephen Hawking); filosofo; giochi matematici.

John Horton Conway (1937-)

Geniale matematico inglese. Contributi fondamentali nella teoria dei gruppi (Atlante di gruppi finiti), teoria dei nodi, topologia, teoria dei numeri.

Personaggi

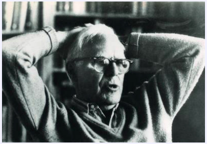


Sir Roger Penrose (1931-)

Fisico e matematico inglese. Contributi nel campo della relatività generale (cosmologia e buchi neri, con Stephen Hawking); filosofo; giochi matematici.

John Horton Conway (1937-)

Geniale matematico inglese. Contributi fondamentali nella teoria dei gruppi (Atlante di gruppi finiti), teoria dei nodi, topologia, teoria dei numeri.



Martin Gardner (1914-2010)

Matematico, illusionista, divulgatore scientifico americano. Curatore della rubrica "Mathematical Games" su "Scientific American".

Giochi matematici, Le Scienze 1977

GIOCHI MATEMATICI

di Martin Gardner

Una straordinaria tassellatura non periodica che arricchisce la teoria delle tassellature

Nel maggio del 1976, alla fine della seconda parte di un articolo sulla tassellatura del piano con poligoni congruenti convessi, promisi un successivo articolo sulla tassellatura non periodica. Mantengo ora la promessa e presento per la prima volta una notevole tassellatura non periodica, scoperta da Roger Penrose, un fisico matematico inglese. Darò dapprima alcune definizioni e illustrerò alcuni presupposti.

Una tassellatura periodica è una tassellatura in cui si può delimitare una regione che ricopre il piano per traslazione, cioè per spostamento della regione senza rotazione né riflessione. L'artista olandese M.C. Escher è famoso per le molte tassellature periodiche con forme che rappresentano esseri viventi che compaiono nei suoi quadri. Di esse è un tipico esempio la figura in basso. L'area colorata individua una regione fondamentale che tassella il piano per traslazione. Si pensi di coprire il piano con un foglio di carta trasparente su cui siano segnati i contorni di ogni regione. Solo se la tassellatura è periodica si può spostare il foglio, senza ruotarlo, in una nuova posizione in cui tutti i contorni corrispondono ancora esattamente.

Una tassellatura periodica di M.C. Escher (1938).

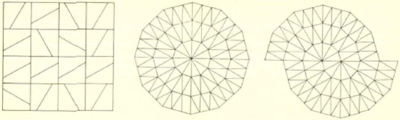
Un'infinità di forme, per esempio l'esagono regolare, tassellano il piano solo in modo periodico. Un'infinità di altre forme lo tassellano sia periodicamente che non periodicamente. Una scacchiera si può facilmente trasformare in una tassellatura non periodica di triangoli rettangoli isosceli identici o di quadrilateri. Basta bisecare ogni casella, come si vede nella figura in alto a sinistra della pagina a fronte, cambiando l'orientamento delle bisezioni per evitare la periodicità.

I triangoli isosceli danno luogo anche a tassellature radiali come quella che si vede al centro della figura. Sebbene la tassellatura sia altamente ordinata, è ovviamente non periodica. Tale tassellatura, come ha fatto notare Michael Goldberg in un articolo del 1955 intitolato *Central Tassellations*, si può tagliare a metà e poi si possono spostare di un passo o più i due semipiani in modo da ottenere una forma a spirale di tassellatura non periodica, come si vede a destra nell'illustrazione. Il triangolo si può distorcere in un'infinità di modi, rimpiazzando i suoi lati uguali con linee congruenti, come si vede nella figura della pagina a fronte al centro. Se i nuovi lati sono rettilinei, il risultato è un poligono di 5, 7, 9, 11... lati che dà luogo a una tassellatura a spirale. Nella figura in basso della pagina a fronte si vede una singolare struttura ottenuta in questo modo da un poligono di nove lati: ottenuta per la prima volta da Heinz Voderberg con una complicata procedura, oggi si può realizzare più facilmente col metodo di Goldberg.

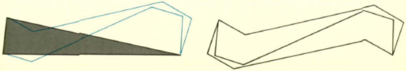
In tutti i casi conosciuti di tassellatura non periodica con figure congruenti, la figura tassella anche periodicamente. La figura a destra della illustrazione al centro nella pagina a fronte mostra come si possono mettere insieme due degli ennagoni di Voderberg per formare un ottagono che in modo ovvio dà luogo a una tassellatura periodica.

Un altro tipo di tassellatura non periodica si ottiene unendo le tessere in modo da riprodurre più in grande la forma della stessa tessera. Solomon W. Golomb le chiama «rettili» (*rep-tile:* tessera ripetuta). (Si veda il capitolo 19 del mio libro *Unexpected Hanging.*) La figura in basso a pagina 120 mostra come una forma detta «sfinge» costituisca una tassellatura non periodica dando luogo a sfingi sempre più ampie. Anche qui due sfingi (una delle quali ruotata di 180 gradi) costituiscono ovviamente una tassellatura periodica.

Ci sono insiemi di tessere di due o più forme *differenti* che diano luogo solo a tassellature non periodiche? Per «solo» intendiamo che né una singola forma, né un sottoinsieme né l'intero insieme dan-



Tassellature non periodiche con forme congruenti.



Un ennagono (in colore a sinistra) e una coppia di ennagoni (a destra) che formano un ottagono che tassella periodicamente.

Una tassellatura a spirale di Heinz Voderberg.

Animazione “Frecce e aquiloni nel cielo della matematica”

- Maurizio Paolini e Alessandro Musesti (2010)
- Licenza “Creative Commons”
- Fotogrammi ottenuti con POV-Ray (`www.povray.org`)
- Musiche di *Zero-project* (Ambient Symphony)
- Prodotto integralmente utilizzando software “opensource” su piattaforma Linux
- Durata 16 minuti
- `http://frecceaquiloni.dmf.unicatt.it/`

Ripasso...

La Tassellazione con frecce e aquiloni è aperiodica se

I due tasselli (la "freccia" e l'"aquilone") sono tali che:

1. Con essi è possibile tassellare il piano...
2. Non è possibile farlo in modo periodico!

Si tratta quindi di verificare due fatti.
Il primo (più facile) è "costruttivo": basta mostrare almeno un modo operativo per tassellare tutto il piano. Si usa la procedura di "deflazione" spiegata nell'animazione.

Il secondo è ben più delicato... tanto è vero che ad oggi non si conoscono tassellature aperiodiche che utilizzino un unico tassello.
Si utilizza la proprietà di **inflazionabilità** di una tassellazione del piano (con frecce e aquiloni).

Ripasso...

La Tassellazione con frecce e aquiloni è aperiodica se

I due tasselli (la "freccia" e l'"aquilone") sono tali che:

1. Con essi è possibile tassellare il piano...
2. Non è possibile farlo in modo periodico!

Si tratta quindi di verificare due fatti.
Il primo (più facile) è "costruttivo": basta mostrare almeno un modo operativo per tassellare tutto il piano. Si usa la procedura di "deflazione" spiegata nell'animazione.

Il secondo è ben più delicato... tanto è vero che ad oggi non si conoscono tassellature aperiodiche che utilizzino un unico tassello. Si utilizza la proprietà di **inflazionabilità** di una tassellazione del piano (con frecce e aquiloni).

Ripasso...

La Tassellazione con frecce e aquiloni è aperiodica se

I due tasselli (la "freccia" e l'"aquilone") sono tali che:

1. Con essi è possibile tassellare il piano...
2. Non è possibile farlo in modo periodico!

Si tratta quindi di verificare due fatti.
Il primo (più facile) è "costruttivo": basta mostrare almeno un modo operativo per tassellare tutto il piano. Si usa la procedura di "deflazione" spiegata nell'animazione.

Il secondo è ben più delicato... tanto è vero che ad oggi non si conoscono tassellature aperiodiche che utilizzino un unico tassello.
Si utilizza la proprietà di **inflazionabilità** di una tassellazione del piano (con frecce e aquiloni).

Curiosità storica

Nel 1961 Hao Wang ha dimostrato che il problema del "domino" è decidibile (cioè esiste un algoritmo per decidere se un dato insieme finito di prototasselli può tassellare il piano) se ogniqualvolta un insieme ti prototasselli ammettesse una tassellazione del piano allora ne ammetterebbe anche una periodica...

Curiosità storica

Nel 1961 Hao Wang ha dimostrato che il problema del "domino" è decidibile (cioè esiste un algoritmo per decidere se un dato insieme finito di prototasselli può tassellare il piano) se ogniqualvolta un insieme ti prototasselli ammettesse una tassellazione del piano allora ne ammetterebbe anche una periodica...

Nel 1966 Robert Berger ha dimostrato che il problema del "domino" è **indecidibile**. Ne segue immediatamente che **deve esistere** un insieme di prototasselli aperiodici!

Curiosità storica

Nel 1961 Hao Wang ha dimostrato che il problema del "domino" è decidibile (cioè esiste un algoritmo per decidere se un dato insieme finito di prototasselli può tassellare il piano) se ogniqualvolta un insieme ti prototasselli ammettesse una tassellazione del piano allora ne ammetterebbe anche una periodica...

Nel 1966 Robert Berger ha dimostrato che il problema del "domino" è **indecidibile**. Ne segue immediatamente che **deve esistere** un insieme di prototasselli aperiodici!

Il primo esempio (di Berger) utilizzava la bellezza di 20426 tasselli! Poi ridotti a 104, poi a 40, poi a 13 da Berger e altri e a 6 nel 1971 da Raphael Robinson.
I primi esempi di Penrose risalgono al 1973.

Curiosità storica

Nel 1961 Hao Wang ha dimostrato che il problema del "domino" è decidibile (cioè esiste un algoritmo per decidere se un dato insieme finito di prototasselli può tassellare il piano) se ogniqualvolta un insieme ti prototasselli ammettesse una tassellazione del piano allora ne ammetterebbe anche una periodica...

Nel 1966 Robert Berger ha dimostrato che il problema del "domino" è **indecidibile**. Ne segue immediatamente che **deve esistere** un insieme di prototasselli aperiodici!

Il primo esempio (di Berger) utilizzava la bellezza di 20426 tasselli!
Poi ridotti a 104, poi a 40, poi a 13 da Berger e altri e a 6 nel 1971 da Raphael Robinson.
I primi esempi di Penrose risalgono al 1973.

Curiosamente il problema analogo in 3D è più facile... ad esempio Conway ha prodotto un singolo tassello aperiodico rispetto allo spazio tridimensionale.

Deflazione

Per dimostrare che con **aquiloni** e **frecce** è possibile piastrellare l'intero piano utilizziamo la cosiddetta procedura di **deflazione**. L'idea è di suddividere i due tasselli con copie più piccole di loro stessi.

Illustriamo il procedimento con una analogia monodimensionale, la famosa **stringa dei conigli di Fibonacci**:

1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 ...

Leonardo Fibonacci, Pisa, 1170ca. Pisa, 1240ca., famosissimo matematico italiano, autore del "Liber abbaci" e ideatore della successione che da lui prende il nome.

Deflazione

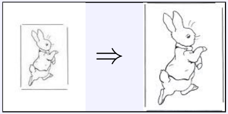
Per dimostrare che con **aquiloni** e **frecce** è possibile piastrellare l'intero piano utilizziamo la cosiddetta procedura di **deflazione**.
L'idea è di suddividere i due tasselli con copie più piccole di loro stessi.
Illustriamo il procedimento con una analogia monodimensionale, la famosa **stringa dei conigli di Fibonacci**:

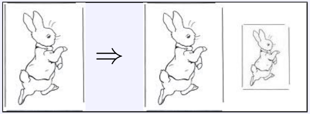
$\boxed{1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ \ldots}$

Leonardo Fibonacci, Pisa, 1170ca. Pisa, 1240ca., famosissimo matematico italiano, autore del "Liber abbaci" e ideatore della successione che da lui prende il nome.

Deflazione (2)

Vi ricordate? Fibonacci considerava conigli immaginari che possono essere piccoli o grandi, un coniglio piccolo diventa grande e un coniglio grande rimane grande e genera un nuovo coniglio piccolo:



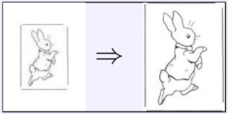


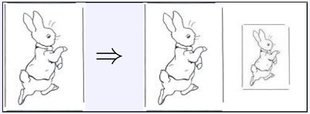
L'idea è di applicare due semplici regole di sostituzione per trasformare una sequenza di 0 e 1 (zero e uno, coniglio piccolo e coniglio grande) e passare da una *generazione* alla successiva. Le due regole sono:

$$0 \Rightarrow 1 \qquad\qquad 1 \Rightarrow 1\ 0$$

Deflazione (2)

Vi ricordate? Fibonacci considerava conigli immaginari che possono essere piccoli o grandi, un coniglio piccolo diventa grande e un coniglio grande rimane grande e genera un nuovo coniglio piccolo:





L'idea è di applicare due semplici regole di sostituzione per trasformare una sequenza di 0 e 1 (zero e uno, coniglio piccolo e coniglio grande) e passare da una *generazione* alla successiva.
Le due regole sono:

$$0 \Rightarrow 1 \qquad\qquad 1 \Rightarrow 1\ 0$$

Deflazione (3)

Applichiamo le due regole alla lettera a partire dalla stringa "1" per sei generazioni:

$1 \longrightarrow 10 \longrightarrow 101 \longrightarrow 10110 \longrightarrow 10110101 \longrightarrow 1011010110110$

Nota

Ogni nuova stringa inizia con la stringa precedente! Questo è un fatto **importantissimo** e per nulla ovvio. In particolare si può "passare al limite" e ottenere una stringa infinita.

Nota 2

Ad ogni passaggio si inseriscono nuovi caratteri che devono "farsi posto" nella stringa spostando verso destra i caratteri successivi.

Deflazione (3)

Applichiamo le due regole alla lettera a partire dalla stringa "1" per sei generazioni:

$1 \to 10 \to 101 \to 10110 \to 10110101 \to 1011010110110$

Nota

Ogni nuova stringa inizia con la stringa precedente! Questo è un fatto **importantissimo** e per nulla ovvio. In particolare si può "passare al limite" e ottenere una stringa infinita.

Nota 2

Ad ogni passaggio si inseriscono nuovi caratteri che devono "farsi posto" nella stringa spostando verso destra i caratteri successivi.

Applichiamo le due regole alla lettera a partire dalla stringa "1" per sei generazioni:

$1 \longrightarrow 10 \longrightarrow 101 \longrightarrow 10110 \longrightarrow 10110101 \longrightarrow 1011010110110$

Nota

Ogni nuova stringa inizia con la stringa precedente! Questo è un fatto **importantissimo** e per nulla ovvio. In particolare si può "passare al limite" e ottenere una stringa infinita.

Nota 2

Ad ogni passaggio si inseriscono nuovi caratteri che devono "farsi posto" nella stringa spostando verso destra i caratteri successivi.

Usiamo segmenti allineati (bianchi e neri) al posto dei caratteri 0 e 1. Questo ci permette (accorciando i segmenti quando serve) di evitare lo spostamento verso destra:

Deflazione (4)

Usiamo segmenti allineati (bianchi e neri) al posto dei caratteri 0 e 1. Questo ci permette (accorciando i segmenti quando serve) di evitare lo spostamento verso destra:

Ma così otteniamo segmenti di varia lunghezza...

Deflazione (5)

Si può ovviare decidendo che i segmenti neri (conigli grandi) siano un po' più lunghi dei segmenti bianchi. Il rapporto giusto è (indovinate...):

Deflazione (5)

Si può ovviare decidendo che i segmenti neri (conigli grandi) siano un po' più lunghi dei segmenti bianchi. Il rapporto giusto è (indovinate...):

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180...$$

Deflazione (5)

Si può ovviare decidendo che i segmenti neri (conigli grandi) siano un po' più lunghi dei segmenti bianchi. Il rapporto giusto è (indovinate...):

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180...$$

Ovvero: ricopriamo i tasselli (segmenti bianchi, più corti, e segmenti neri, un po' più lunghi) con copie più piccole degli stessi.

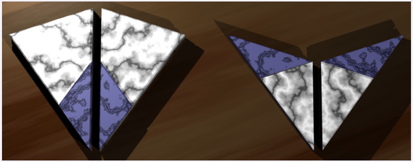
Deflazione (6)

Se poi dilatiamo di un fattore ϕ il risultato di una nuova generazione, i segmenti bianchi e neri mantengono la loro dimensione originale.
L'unione di tutti i segmenti diventa ora sempre più grande fino ad invadere una intera semiretta (manteniamo l'allineamento a sinistra in modo da sfruttare il fatto che la stringa di '0' e '1' di Fibonacci alla nuova generazione 'prolunga' la generazione precedente.)

Deflazione (6)

Se poi dilatiamo di un fattore ϕ il risultato di una nuova generazione, i segmenti bianchi e neri mantengono la loro dimensione originale.
L'unione di tutti i segmenti diventa ora sempre più grande fino ad invadere una intera semiretta (manteniamo l'allineamento a sinistra in modo da sfruttare il fatto che la stringa di '0' e '1' di Fibonacci alla nuova generazione 'prolunga' la generazione precedente.)

Ora l'analogia è perfetta con i triangoli aurei acuti e ottusi (mezzo aquilone e mezza freccia) ricoperti con copie più piccole degli stessi:



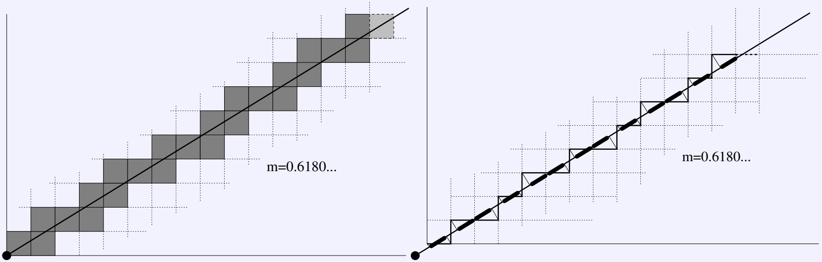
Deflazione (7)

Conclusione

con successive “deflazioni” e dilatazioni otteniamo una tassellazione di una regione sempre più ampia; si scopre che ogni 4 generazioni la tassellazione consiste in una “estensione” di quella vecchia, permettendo un “passaggio al limite”.

Alla fine si ottiene una tassellazione di tutto il piano, nell’animazione si ottiene il cosiddetto “sun pattern” o lo “star pattern”, partendo da un decagono formato da 5 aquiloni.

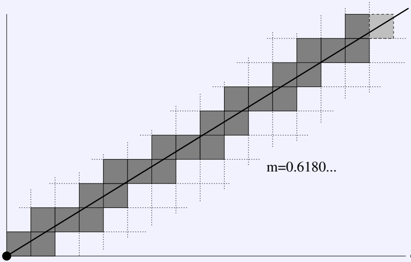
Quindi “freccia” e “aquilone” possono tassellare il piano!

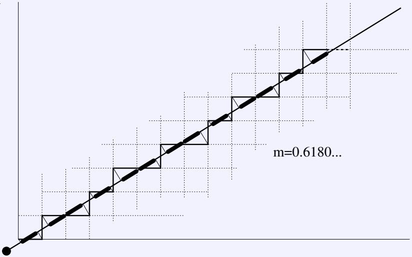


1 : verso destra   0 : verso l'alto $m = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi - 1 = \frac{1}{\phi}$

$\boxed{1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ \ldots}$

(Si, è ancora lei, la stringa dei conigli di Fibonacci!)





1 : verso destra 0 : verso l'alto $m = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi - 1 = \frac{1}{\phi}$

$\boxed{1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ \ldots}$

(Si, è ancora lei, la stringa dei conigli di Fibonacci!)

Frecce e aquiloni:

Piano opportuno dentro un reticolo cubico in dimensione 5

Inflazione

Richiamo

1. ...
2. Non è possibile farlo in modo periodico!

Inflazione

Richiamo

1. ...
2. Non è possibile farlo in modo periodico!

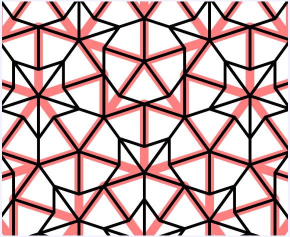
L'ingrediente fondamentale per dimostrarlo è la possibilità di fare il **contrario della deflazione** (**inflazione**), ovvero ricostruire una tassellazione con tasselli più grossi.

Inflazione

Richiamo

1. ...
2. Non è possibile farlo in modo periodico!

L'ingrediente fondamentale per dimostrarlo è la possibilità di fare il **contrario della deflazione** (**inflazione**), ovvero ricostruire una tassellazione con tasselli più grossi.
Che questo sia possibile è ovvio per la tassellazione costruita per **deflazione**, ma non lo è per nulla per una generica tassellazione!



Chiamiamo **Universo di Penrose** una tassellazione del piano con frecce e aquiloni.
Conway ha scoperto proprietà veramente sorprendenti sugli universi di Penrose, eccone alcune:

Universi di Penrose

Chiamiamo **Universo di Penrose** una tassellazione del piano con frecce e aquiloni.
Conway ha scoperto proprietà veramente sorprendenti sugli universi di Penrose, eccone alcune:

- C'è una quantità più che numerabile di **universi di Penrose** diversi

Universi di Penrose

Chiamiamo **Universo di Penrose** una tassellazione del piano con frecce e aquiloni.
Conway ha scoperto proprietà veramente sorprendenti sugli universi di Penrose, eccone alcune:

- C'è una quantità più che numerabile di **universi di Penrose** diversi
- Ogni regione limitata di un universo di Penrose si ritrova identica in un qualunque altro universo di Penrose; inoltre per trovarla è sufficientemente percorrere una distanza $2d$, dove d è il diametro della regione di partenza

Universi di Penrose

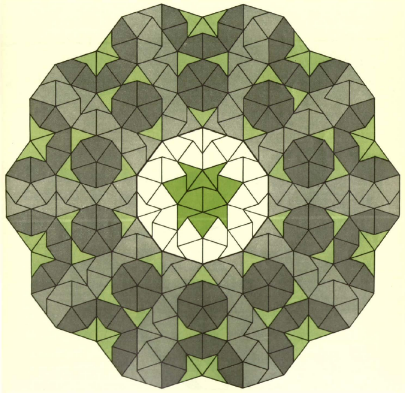
Chiamiamo **Universo di Penrose** una tassellazione del piano con frecce e aquiloni.
Conway ha scoperto proprietà veramente sorprendenti sugli universi di Penrose, eccone alcune:

- C'è una quantità più che numerabile di **universi di Penrose** diversi
- Ogni regione limitata di un universo di Penrose si ritrova identica in un qualunque altro universo di Penrose; inoltre per trovarla è sufficientemente percorrere una distanza $2d$, dove d è il diametro della regione di partenza
- Se si rimuove un numero finito di tasselli da un universo di Penrose, non c'è altro modo di "riempire il buco" se non quello iniziale

Chiamiamo **Universo di Penrose** una tassellazione del piano con frecce e aquiloni.
Conway ha scoperto proprietà veramente sorprendenti sugli universi di Penrose, eccone alcune:

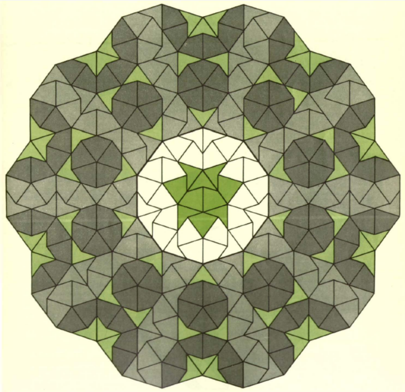
- C'è una quantità più che numerabile di **universi di Penrose** diversi
- Ogni regione limitata di un universo di Penrose si ritrova identica in un qualunque altro universo di Penrose; inoltre per trovarla è sufficientemente percorrere una distanza $2d$, dove d è il diametro della regione di partenza
- Se si rimuove un numero finito di tasselli da un universo di Penrose, non c'è altro modo di "riempire il buco" se non quello iniziale

Nota: proprietà quasi identiche valgono anche per gli **Universi** (monodimensionali) **di Fibonacci**



Ecco la struttura (infinita) che Conway ha battezzato "**cartwheel**", letteralmente "ruota di carro".
Si distingue un "**batman**" (pipistrello) al centro formato da 5 frecce e 5 aquiloni; un decagono bianco che lo circonda; dieci "**worms**" (vermi) che formano i raggi della ruota.

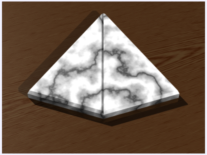
Ruote di carro, Galli e pipistrelli...



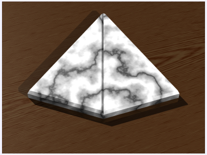
Ecco la struttura (infinita) che Conway ha battezzato "**cartwheel**", letteralmente "ruota di carro".
Si distingue un "**batman**" (pipistrello) al centro formato da 5 frecce e 5 aquiloni; un decagono bianco che lo circonda; dieci "**worms**" (vermi) che formano i raggi della ruota.

I lati del decagono sono divisi secondo la sezione aurea e delimitano una corona (regione bianca nel disegno) formata da dieci *ace*, come Conway chiama la struttura a forma di aquilone più grande fatta da due aquiloni e una freccia.
I "vermi" sono formati da una sequenza di "**bow ties**" (farfallini/papillons) lunghi e corti.

Il cartwheel si ottiene per deflazione a partire da due mezzi aquiloni (triangoli aurei acuti)



Il cartwheel si ottiene per deflazione a partire da due mezzi aquiloni (triangoli aurei acuti)



Animazione "Da Batman ad Asterix e i 62 decapodi"

- M. Paolini (gennaio 2011)
- Musiche di *Zero-project* (Ambient Symphony)
- Durata 5 minuti

Ruote di carro, Galli e pipistrelli... (2)

La regione esterna al decagono ha a prima vista una simmetria decagonale; questo è vero solo se si rimuovono anche i “vermi”...

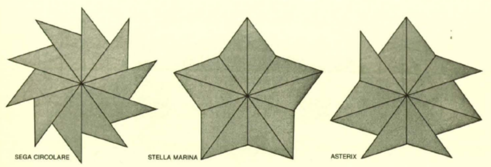
La regione esterna al decagono ha a prima vista una simmetria decagonale; questo è vero solo se si rimuovono anche i "vermi"...

Una volta rimosso il "batman" centrale è possibile rovesciare uno o più vermi (ruotando di conseguenza anche il corrispondente "**ace**" ("asso", struttura con una freccia e due aquiloni a forma di aquilone più grande) interno al decagono.

La regione esterna al decagono ha a prima vista una simmetria decagonale; questo è vero solo se si rimuovono anche i "vermi"...

Una volta rimosso il "batman" centrale è possibile rovesciare uno o più vermi (ruotando di conseguenza anche il corrispondente "**ace**" ("asso", struttura con una freccia e due aquiloni a forma di aquilone più grande) interno al decagono.

Questo modifica la forma del buco centrale dove si trovava il "batman"; le possibili forme che si ottengono (sono 62 a meno di simmetrie) sono state chiamate "**decapodi**" da Conway, uno di questi è il "batman" stesso, un altro è "**Asterix**" (il Gallo)



Ruote di carro, Galli e pipistrelli... (3)

- Con l'eccezione di "*batman*" nessun decapodo è tassellabile

Ruote di carro, Galli e pipistrelli... (3)

- Con l'eccezione di "*batman*" nessun decapodo è tassellabile
- Con l'eccezione di "*batman*" e "*asterix*" l'esterno di un decapodo è tassellabile in modo unico

- Con l'eccezione di "*batman*" nessun decapodo è tassellabile
- Con l'eccezione di "*batman*" e "*asterix*" l'esterno di un decapodo è tassellabile in modo unico
- Un decapodo può essere interpretato come fosse una **dislocazione** in un reticolo cristallino: può essere riposizionato (ricollocando un numero finito di tasselli), ma non può essere eliminato

Ruote di carro, Galli e pipistrelli... (3)

- Con l'eccezione di "*batman*" nessun decapodo è tassellabile
- Con l'eccezione di "*batman*" e "*asterix*" l'esterno di un decapodo è tassellabile in modo unico
- Un decapodo può essere interpretato come fosse una **dislocazione** in un reticolo cristallino: può essere riposizionato (ricollocando un numero finito di tasselli), ma non può essere eliminato
- I 61 decapodi (escludendo batman) sono essenzialmente gli unici tipi di "buchi" in una tassellazione di quasi tutto il piano (nel 1975 questa era una congettura, non so se poi è stata dimostrata)

La sorpresa finale...

Com'è fatto un "verme" della ruota del carro?
Se indichiamo con un **1** un papillon lungo e con uno **0** un papillon corto, la successione dei papillon che formano l'intero raggio della ruota corrisponde a...

La sorpresa finale...

Com'è fatto un "verme" della ruota del carro?
Se indichiamo con un **1** un papillon lungo e con uno **0** un papillon corto, la successione dei papillon che formano l'intero raggio della ruota corrisponde a...

$\boxed{1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ \ldots}$

Di nuovo la stringa dei conigli di Fibonacci!

Bibliografia

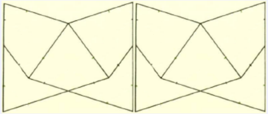
1. B. Grünbaum G.C. Shephard, Tiling and Patterns, W.H. Freeman, New York, 1987.
2. M. Senechal, Quasycristals and geometry, Cambridge University Press, 1995.
3. R. Penrose, The role of aesthetics in pure and applied mathematical research, Bull. Inst. of Math. and its Appl. 10, 1974.
4. D. Schattschneider, Visioni della simmetria. I disegni periodici di M. C. Escher, Edizioni Zanichelli, 1992.
5. M. Gardner, Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles, rubrica “Mathematical Games” di Scientific american, 1975(?), tradotto su Le Scienze, 1977(?).

Esercizi

Supponiamo che le lunghezze dei lati dei tasselli siano 1 e $\phi = 1,6180...$

- Costruire un decagono di lato 1
- Costruire un decagono di lato ϕ
- Costruire un decagono di lato $1 + \phi$ (dentro ci sarà un batman)

Si può estendere una coppia di papillon piccoli affiancati in una tassellazione di tutto il piano?



E una terna di papillon grandi?