

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
Sede di Brescia  
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

## APPUNTI DI MECCANICA ANALITICA

a cura di Alessandro Musesti (<https://dmf.unicatt.it/musesti>)

Anno Accademico 2025-2026

Versione del 18 febbraio 2026

### Indice

<b>1 Baricentro e tensore d'inerzia</b>	<b>2</b>
<b>2 I sistemi olonomi</b>	<b>9</b>
<b>3 Le tre forme delle equazioni di Lagrange</b>	<b>11</b>
<b>4 L'azione lagrangiana</b>	<b>14</b>
<b>5 Potenziale generalizzato ed energia cinetica</b>	<b>16</b>
<b>6 Stabilità dell'equilibrio</b>	<b>20</b>
<b>7 Integrali primi e Teorema di Noether</b>	<b>22</b>
<b>8 Hamiltoniana</b>	<b>24</b>
<b>9 Trasformazioni canoniche</b>	<b>28</b>
<b>10 Gruppo simplettico</b>	<b>31</b>
<b>11 Funzione generatrice</b>	<b>32</b>
<b>12 Cenno al metodo di Hamilton-Jacobi</b>	<b>35</b>
<b>13 Parentesi di Poisson</b>	<b>36</b>

# 1 Baricentro e tensore d'inerzia

**Definizione 1.1 (Baricentro).** Dato un sistema di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di masse, rispettivamente,  $m_1, \dots, m_N$ , definiamo *baricentro*, o *centro di massa* del sistema il punto di posizione  $(G - O)$  dato da

$$(G - O) = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^N m_s (P_s - O)$$

dove  $M := \sum_{s=1}^N m_s$  è la *massa totale* del sistema. ★

Nel caso di distribuzioni di massa volumetriche  $V$ , superficiali  $S$  o lineari  $L$ , di densità rispettivamente  $\rho_V, \rho_S, \rho_L$ , si hanno le espressioni

$$\begin{aligned} (G - O) &= \frac{1}{M} \int_V \rho_V(\mathbf{x}) \mathbf{x} d\mathcal{L}^3(\mathbf{x}), \\ (G - O) &= \frac{1}{M} \int_S \rho_S(\mathbf{x}) \mathbf{x} d\mathcal{H}^2(\mathbf{x}), \\ (G - O) &= \frac{1}{M} \int_L \rho_L(\mathbf{x}) \mathbf{x} d\mathcal{H}^1(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{x}$  è la posizione rispetto ad  $O$ .

**Teorema 1.2 (Teorema della quantità di moto).** In un sistema meccanico a masse costanti di massa totale  $M$  e velocità del baricentro  $\mathbf{v}(G)$  la quantità di moto totale  $\mathbf{p}$  è data da

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v}(G).$$

*Dimostrazione.* Supponendo il sistema fatto da un numero finito di punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$  la quantità di moto totale è data da

$$\sum_{s=1}^N m_s \mathbf{v}(P_s).$$

Partendo dalla definizione di baricentro e derivando ambo i membri rispetto al tempo, tenendo conto delle masse costanti si trova

$$M\mathbf{v}(G) = M \frac{d}{dt} (G - O) = \sum_{s=1}^N m_s \frac{d}{dt} (P_s - O) = \sum_{s=1}^N m_s \mathbf{v}(P_s) = \mathbf{p}. \quad \square$$

**Proposizione 1.3 (Proprietà del baricentro).** Dato un sistema meccanico, si ha:

- (1)  $G$  appartiene al convessificato del sistema, ovvero al più piccolo insieme convesso che contiene il sistema;
- (2) se esiste un piano di simmetria materiale,<sup>(1)</sup> il baricentro appartiene ad esso;

---

<sup>(1)</sup>Un *piano di simmetria materiale* è un piano di riflessione rispetto a cui il simmetrico di ogni punto del sistema è ancora un punto del sistema con la stessa massa (o la stessa densità di massa se il sistema è continuo).

(3) si può fare il baricentro dei baricentri, ovvero: per trovare il baricentro di un sistema si può sostituire ad un suo sottosistema un punto materiale avente la massa del sottosistema e la posizione del baricentro del sottosistema.

*Dimostrazione.* La dimostrazione viene lasciata per esercizio.  $\square$

Consideriamo ora un *corpo rigido con un punto fisso* costituito da  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di masse, rispettivamente,  $m_1, \dots, m_N$ . Denotando con  $O$  il punto fisso e con  $(P_s - O)$  il vettore posizione del punto  $P_s$  rispetto ad  $O$ , ricordando la legge dello stato cinetico di un moto rigido si ha

$$\mathbf{v}_s = \boldsymbol{\omega} \times (P_s - O),$$

dove  $\mathbf{v}$  denota la velocità di  $P_s$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  la velocità angolare, e abbiamo tenuto conto che  $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$  essendo fisso. Esprimiamo il momento della quantità di moto del corpo rigido rispetto a  $O$ :

$$\mathbf{K}_O = \sum_{s=1}^N (P_s - O) \times m_s \mathbf{v}_s = \sum_{s=1}^N m_s (P_s - O) \times (\boldsymbol{\omega} \times (P_s - O)).$$

La sommatoria può essere interpretata come una funzione che a  $\boldsymbol{\omega}$  associa un vettore in modo lineare, dunque come un endomorfismo su  $\mathbb{R}^3$ . Tale endomorfismo, o tensore, dipende ovviamente dal sistema di punti materiali e dalle loro masse, ma anche dal punto  $O$ , per cui lo denoteremo col simbolo  $\mathbf{J}_O$ :

$$\mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega} := \sum_{s=1}^N m_s (P_s - O) \times (\boldsymbol{\omega} \times (P_s - O)). \quad (1)$$

Elaborando il doppio prodotto vettoriale tramite la formula  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$  otteniamo

$$\mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega} = \sum_{s=1}^N m_s \left[ |P_s - O|^2 \boldsymbol{\omega} - ((P_s - O) \cdot \boldsymbol{\omega})(P_s - O) \right].$$

Se ora scriviamo l'ultimo termine a destra come

$$((P_s - O) \cdot \boldsymbol{\omega})(P_s - O) = [(P_s - O) \otimes (P_s - O)] \boldsymbol{\omega},$$

introducendo il tensore identità  $\mathbf{I}$  possiamo riscrivere  $\mathbf{J}_O$  come somma di tensori:

$$\mathbf{J}_O = \sum_{s=1}^N m_s \left( |P_s - O|^2 \mathbf{I} - (P_s - O) \otimes (P_s - O) \right). \quad (2)$$

**Definizione 1.4 (Tensore d'inerzia).** Il tensore  $\mathbf{J}_O$  definito in (2) si chiama *tensore d'inerzia* rispetto ad  $O$  del corpo rigido.  $\star$

Se il corpo rigido è una distribuzione di massa volumetrica, superficiale o lineare, si ha, rispettivamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_O &= \int_V \rho_V(\mathbf{x}) (|\mathbf{x}|^2 \mathbf{I} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) d\mathcal{L}^3(\mathbf{x}), \\ \mathbf{J}_O &= \int_S \rho_S(\mathbf{x}) (|\mathbf{x}|^2 \mathbf{I} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) d\mathcal{H}^2(\mathbf{x}), \\ \mathbf{J}_O &= \int_L \rho_L(\mathbf{x}) (|\mathbf{x}|^2 \mathbf{I} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) d\mathcal{H}^1(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{x}$  è la posizione rispetto ad  $O$ .

**Teorema 1.5 (Teorema del momento della quantità di moto).** Il momento della quantità di moto di un corpo rigido rispetto a un punto  $O$  solidale col corpo rigido è dato da

$$\mathbf{K}_O = \sum_{s=1}^N (P_s - O) \times m_s \mathbf{v}_s = M(G - O) \times \mathbf{v}(O) + \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}.$$

*Dimostrazione.* Nel ragionamento introduttivo, fatto su un corpo rigido con punto fisso, è sufficiente considerare la legge dello stato cinetico in generale:

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}(O) + \boldsymbol{\omega} \times (P_s - O),$$

da cui

$$\mathbf{K}_O = \sum_{s=1}^N m_s (P_s - O) \times \mathbf{v}(O) + \sum_{s=1}^N m_s (P_s - O) \times (\boldsymbol{\omega} \times (P_s - O)).$$

Usando la definizione di baricentro nella prima sommatoria e quella di tensore d'inerzia nella seconda, si ottiene la tesi.  $\square$

**Definizione 1.6 (Momento d'inerzia).** Dato un asse  $r$  passante per  $O$  di versore  $\mathbf{r}$ , si definisce momento d'inerzia rispetto all'asse  $r$  la quantità

$$I_r = \mathbf{r} \cdot \mathbf{J}_O \mathbf{r}.$$

Si verifica facilmente che

$$I_r = \sum_{s=1}^N m_s d(P_s, r)^2,$$

essendo  $d(P_s, r)$  la distanza del punto  $P_s$  dall'asse  $r$ . In particolare  $I_r \geq 0$ , e dunque il tensore  $\mathbf{J}_O$  è (semi)definito positivo.  $\star$

Fissata una base ortonormale  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , è possibile rappresentare  $\mathbf{J}_O$  tramite una matrice simmetrica e semidefinita positiva, detta *matrice d'inerzia*. Gli autovalori della matrice vengono detti *momenti principali d'inerzia*, e gli assi corrispondenti agli autovettori si dicono *assi principali d'inerzia*. Si noti che, grazie alla simmetria della matrice, esistono sempre almeno tre assi principali d'inerzia mutuamente ortogonali.

Denotando con

$$\mathbf{J}_O = [J_{hk}]$$

le componenti di tale matrice, si ha che gli elementi sulla diagonale sono i momenti d'inerzia rispetto ai tre assi del sistema di riferimento, mentre gli elementi fuori dalla diagonale vengono detti *prodotti d'inerzia* o *momenti di deviazione*. Si ha poi che:

- (1) se una distribuzione di massa è contenuta nel piano  $x_1x_2$ , si ha  $J_{33} = J_{11} + J_{22}$ ;
- (2) se un piano coordinato, diciamo  $x_3 = 0$ , è piano di simmetria materiale, i corrispondenti momenti di deviazione  $J_{13}$  e  $J_{23}$  sono nulli;

- (3) supponiamo di avere una terna ortogonale di assi principali d'inerzia con origine nel centro di massa; allora ogni terna ottenuta da questa traslandola lungo uno dei suoi assi, è ancora fatta da assi principali d'inerzia.<sup>(2)</sup>

Vale poi il seguente teorema.

**Teorema 1.7 (Teorema di Huygens-Steiner).** *Denotando con  $G$  il baricentro del corpo rigido, per un sistema centrato in  $O$  e parallelo ad uno centrato in  $G$  vale*

$$\mathbf{J}_O = \mathbf{J}_G + M(\mathbf{d}^2\mathbf{I} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}),$$

dove  $M$  è la massa totale e  $\mathbf{d} = (G - O)$ .

*Dimostrazione.* Applichiamo la decomposizione vettoriale  $(P_s - O) = (P_s - G) + \mathbf{d}$  nella formula (2):

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_O &= \sum_{s=1}^N m_s \left[ (|P_s - G|^2 + |\mathbf{d}|^2 + 2(P_s - G) \cdot \mathbf{d})\mathbf{I} \right. \\ &\quad \left. - (P_s - G) \otimes (P_s - G) - (P_s - G) \otimes \mathbf{d} - \mathbf{d} \otimes (P_s - G) - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \right] \\ &= \mathbf{J}_G + M(\mathbf{d}^2\mathbf{I} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}) + \sum_{s=1}^N m_s [2(P_s - G) \cdot \mathbf{d}\mathbf{I} - (P_s - G) \otimes \mathbf{d} - \mathbf{d} \otimes (P_s - G)]. \end{aligned}$$

Ma i tre termini nell'ultima sommatoria sono tutti nulli, poiché per definizione di baricentro si ha  $\sum_{s=1}^N m_s(P_s - G) = \mathbf{0}$ . □

Il tensore d'inerzia è molto utile anche nel calcolo dell'energia cinetica di un corpo rigido, grazie al seguente teorema.

**Teorema 1.8 (Teorema di König).** *L'energia cinetica di un corpo rigido è data da*

$$K = \frac{1}{2}M|\mathbf{v}_O|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega} + M\mathbf{v}_O \cdot \boldsymbol{\omega} \times (G - O)$$

dove  $O$  è un punto del corpo rigido.

*Dimostrazione.* Nell'espressione dell'energia cinetica di un sistema di punti

$$K = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_s$$

sostituiamo l'espressione dello stato cinetico rigido  $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (P_s - O)$ , ottenendo

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (P_s - O)) \cdot (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (P_s - O)) \\ &= \frac{1}{2}M|\mathbf{v}_O|^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s (\boldsymbol{\omega} \times (P_s - O)) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times (P_s - O)) + \mathbf{v}_O \cdot \boldsymbol{\omega} \times \sum_{s=1}^N m_s (P_s - O). \end{aligned}$$

---

<sup>(2)</sup>La dimostrazione di questo fatto diventa facile se si usa il Teorema di Huygens-Steiner dimostrato subito sotto: nel caso in questione si ha che  $\mathbf{d} = (G - O)$  è parallelo a un asse di riferimento, quindi  $\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}$  è diagonale (tra l'altro un solo coefficiente è non nullo, ma questo importa poco). Quindi la matrice  $\mathbf{J}_O = \mathbf{J}_G + M(\mathbf{d}^2\mathbf{I} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d})$  è diagonale perché  $\mathbf{J}_G$  e  $M\mathbf{d}^2\mathbf{I}$  sono diagonali, e in questo caso anche  $M\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}$  lo è.

Per definizione di baricentro, l'ultimo termine diventa  $\mathbf{v}_O \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{G} - \mathbf{O})$ . Nel termine centrale scambiamo il primo prodotto vettoriale col prodotto scalare e usiamo la formula (1):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P}_s - \mathbf{O})) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P}_s - \mathbf{O})) \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{s=1}^N m_s (\mathbf{P}_s - \mathbf{O}) \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P}_s - \mathbf{O})) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad \square$$

Alcuni casi particolari del Teorema di König sono molto importanti:

- se  $O$  è un punto fisso, si ha

$$K = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega};$$

- se si sceglie per  $O$  il baricentro  $G$ , si ha

$$K = \frac{1}{2} M |\mathbf{v}_G|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_G \boldsymbol{\omega};$$

- più in generale, se  $A$  è tale che il prodotto misto  $\mathbf{v}_A \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{G} - \mathbf{A}) = 0$ , allora si ha

$$K = \frac{1}{2} M |\mathbf{v}_A|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_A \boldsymbol{\omega}.$$

### 1.1 Corpo rigido con punto fisso

Analizziamo brevemente il moto di un corpo rigido con punto fisso  $O$ : la seconda equazione cardinale della dinamica si scrive

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O$$

(siccome la reazione vincolare  $\Phi$  è applicata in  $O$ , si ha che il momento della reazione vincolare rispetto ad  $O$  si annulla:  $\Psi_O = \mathbf{0}$ ). Ricordando che  $\mathbf{K}_O = \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}$  e usando un sistema  $(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$  di assi principali d'inerzia,<sup>(3)</sup> si ha

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \frac{d}{dt} (J_1 \omega_1 \mathbf{j}_1 + J_2 \omega_2 \mathbf{j}_2 + J_3 \omega_3 \mathbf{j}_3)$$

e usando le *formule di Poisson*  $\frac{d\mathbf{j}_k}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}_k$ , si ottiene

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{J}_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega},$$

da cui, in componenti,

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_3 \omega_2 = M_1 \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = M_2 \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_2 \omega_1 = M_3 \end{cases} \quad (3)$$

che il celeberrimo sistema di *equazioni di Eulero* per il corpo rigido.

---

<sup>(3)</sup>Tale sistema, che esiste grazie alla simmetria di  $\mathbf{J}_O$ , è *solidale* al corpo rigido e si muove con esso.

È interessante il caso di corpo a *struttura giroscopica*, ovvero quando  $J_1 = J_2 = J \neq J_3$ : l'ultima equazione di Eulero diventa

$$J_3\dot{\omega}_3 = M_3$$

e nel caso  $M_3 = 0$  ci dice che  $\omega_3 = \bar{\omega}_3$  è costante. Se poi anche  $M_1 = M_2 = 0$ , allora si dice che il moto del corpo rigido avviene *per inerzia* e si ottiene il sistema

$$\begin{cases} J\dot{\omega}_1 + (J_3 - J)\bar{\omega}_3\omega_2 = 0 \\ J\dot{\omega}_2 - (J_3 - J)\bar{\omega}_3\omega_1 = 0, \end{cases}$$

da cui, aumentando l'ordine di derivazione, ricaviamo

$$\ddot{\omega}_1 + \left(\frac{J_3 - J}{J}\bar{\omega}_3\right)^2\omega_1 = 0,$$

che è l'equazione del moto armonico. Si ottiene un'equazione identica anche per  $\omega_2$ . Quindi ne risulta che, in un sistema solidale al corpo rigido, il vettore  $\boldsymbol{\omega}$  si muove periodicamente con frequenza  $\frac{J_3 - J}{J}\bar{\omega}_3$  attorno alla superficie laterale di un cono di asse  $\mathbf{j}_3$ .

## 1.2 Stabilità delle rotazioni attorno agli assi principali

Poniamoci ora nel caso  $J_1 > J_2 > J_3$  e supponiamo di nuovo che il moto sia per inerzia, cioè  $\mathbf{M} = 0$ . Il sistema delle equazioni di Eulero diventa

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + A_1\omega_3\omega_2 = 0 \\ \dot{\omega}_2 + A_2\omega_1\omega_3 = 0 \\ \dot{\omega}_3 + A_3\omega_2\omega_1 = 0, \end{cases}$$

dove abbiamo posto

$$A_1 = \frac{J_3 - J_2}{J_1} < 0, \quad A_2 = \frac{J_1 - J_3}{J_2} > 0, \quad A_3 = \frac{J_2 - J_1}{J_3} < 0.$$

Le soluzioni costanti sono tutte e sole le rotazioni uniformi attorno a un asse principale. Tali rotazioni però non si comportano tutte allo stesso modo: le rotazioni attorno agli assi  $\mathbf{j}_1$  e  $\mathbf{j}_3$ , corrispondenti ai momenti principali d'inerzia più piccolo e più grande, sono *stabili*, mentre quelle attorno all'asse intermedio sono *instabili*.<sup>(4)</sup>

Infatti, consideriamo una *perturbazione* della soluzione  $\boldsymbol{\omega} = (p_0, 0, 0)$  del tipo  $\boldsymbol{\omega}_\varepsilon(t) = (p_0 + \varepsilon p(t), \varepsilon q(t), \varepsilon r(t))$ , dove  $\varepsilon$  è un parametro piccolo. Sostituendo nel sistema differenziale si ha

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{p} + A_1\varepsilon^2qr = 0 \\ \varepsilon\dot{q} + A_2(\varepsilon p_0r + \varepsilon^2qr) = 0 \\ \varepsilon\dot{r} + A_3(\varepsilon p_0q + \varepsilon^2pq) = 0. \end{cases}$$

---

<sup>(4)</sup>Per ora lasciamo a livello intuitivo il concetto di stabilità, che verrà formalizzato nella Sezione 6 per i sistemi del secondo ordine.

Semplificando  $\varepsilon$  e mandando  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ottiene

$$\begin{cases} \dot{p} = 0 \\ \dot{q} + A_2 p_0 r = 0 \\ \dot{r} + A_3 p_0 q = 0. \end{cases}$$

Dalla prima si ha che  $p$  resta costante, mentre dalle altre due equazioni si ricava

$$\ddot{q} - A_2 A_3 p_0^2 q = 0.$$

Essendo  $A_2 A_3 < 0$ , tale equazione ha soluzioni limitate

$$q(t) = A \sin(kt + \alpha), \quad k^2 = -A_2 A_3 p_0^2.$$

Anche  $r(t)$  ha un comportamento simile, quindi le soluzioni perturbate  $(p_0 + p(t), q(t), r(t))$  restano vicine alla soluzione  $(p_0, 0, 0)$ . Questo vuol dire che la rotazione attorno a  $\mathbf{j}_1$  è stabile.

Se ora facciamo lo stesso conto rispetto alla rotazione  $(0, 0, r_0)$ , riotteniamo ancora un'equazione del moto armonico, quindi anche questa è stabile. Se invece proviamo con la soluzione  $(0, q_0, 0)$ , troviamo l'equazione differenziale

$$\ddot{q} - A_1 A_3 q_0^2 x = 0, \quad A_1 A_3 q_0^2 > 0,$$

che ha come soluzioni delle esponenziali reali, che non sono limitate, quindi la rotazione attorno all'asse intermedio è instabile.

### 1.3 Matrici d'inerzia notevoli

Per gli esercizi è utile conoscere la matrice d'inerzia di alcune figure omogenee notevoli, rispetto a sistemi di riferimento opportuni. Ricordiamo che:

- la matrice d'inerzia di un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ , in un sistema baricentrale in cui l'asta sta lungo l'asse  $y$ , è data da

$$J_G = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{12} \end{bmatrix};$$

- la matrice d'inerzia di un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ , in un sistema baricentrale in cui l'asta sta nel piano  $xy$  e forma un angolo  $\alpha$  con la parte positiva dell'asse  $x$ , è data da

$$J_G = \begin{bmatrix} \frac{m\ell^2}{12} \sin^2 \alpha & -\frac{m\ell^2}{12} \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ -\frac{m\ell^2}{12} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{m\ell^2}{12} \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{12} \end{bmatrix};$$

- la matrice d'inerzia di una lamina omogenea di massa  $m$  a forma di triangolo rettangolo, relativamente a un sistema disposto con gli assi  $x, y$  rispettivamente lungo i cateti  $a, b$ , è data da

$$J_O = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} m b^2 & -\frac{1}{12} m a b & 0 \\ -\frac{1}{12} m a b & \frac{1}{6} m a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} m (a^2 + b^2) \end{bmatrix};$$

- la matrice d'inerzia di una lamina rettangolare omogenea di massa  $m$ , relativamente a un sistema disposto con gli assi  $x, y$  rispettivamente lungo i lati  $a, b$ , è data da

$$J_O = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}mb^2 & -\frac{1}{4}mab & 0 \\ -\frac{1}{4}mab & \frac{1}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m(a^2 + b^2) \end{bmatrix};$$

- la matrice d'inerzia di una circonferenza omogenea di raggio  $R$  e massa  $m$ , giacente nel piano  $xy$  di un sistema di riferimento centrato nel centro  $G$  della circonferenza, è data da

$$J_G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{bmatrix};$$

- la matrice d'inerzia di un disco omogeneo di raggio  $R$  e massa  $m$ , giacente nel piano  $xy$  di un sistema di riferimento centrato nel centro  $G$  del disco, è data da

$$J_G = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{bmatrix}.$$

## 2 I sistemi olonomi

I *sistemi olonomi* sono caratterizzati dall'avere  $N$  punti materiali  $P_s, m_s$  sottoposti a vincoli esprimibili mediante  $k \leq 3N$  equazioni della forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0 \\ f_2(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0 \\ \dots \\ f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0 \end{cases}$$

dove  $(x_s, y_s, z_s)$  sono le coordinate del punto  $P_s$  e  $t$  è il tempo. Le funzioni  $f_i$  verranno supposte almeno di classe  $C^1$ . Se le varie equazioni dei vincoli sono *indipendenti*, ovvero se lo jacobiano

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_N} \\ \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial z_N} \end{bmatrix}$$

ha rango massimo  $k$ , allora si dice che il sistema ha  $n = 3N - k$  gradi di libertà, e in questo caso esistono  $n$  parametri lagrangiani

$$q_1, \dots, q_n$$

per cui, almeno localmente, le coordinate di tutti i punti materiali del sistema si possono scrivere in funzione di questi parametri e del tempo. Useremo la notazione

$$(P_s - O) = \mathbf{c}_s(q_1, \dots, q_n, t) = \mathbf{c}_s(\mathbf{q}, t)$$

e chiameremo i  $\mathbf{c}_s$  vettori *configurazione*.

Dal punto di vista geometrico, nel caso di un sistema olonomo l'insieme delle configurazioni costituisce una *varietà differenziale* di dimensione  $n$  dipendente dal tempo; purtroppo non abbiamo il tempo di sviscerare questo concetto.

Se i vincoli non dipendono esplicitamente dal tempo, si parla di sistema meccanico *scleronomo* (dal greco *σκληρός*, skleros: rigido, *νόμος*, nomos: legge); altrimenti si parla di sistema *reonomo* (*ρέω*, rheo: scorrere).

Esempi di sistemi meccanici olonomi sono tutti i sistemi di punti a vincoli posizionali lisci e bilateri, tra cui i corpi rigidi, oppure i vincoli di puro rotolamento nel piano (che possono essere espressi come vincoli di posizione). Non sono invece olonomi i sistemi che contengono vincoli unilateri (come quelli di appoggio), sistemi che hanno vincoli sulle velocità non riconducibili a vincoli posizionali (si veda l'esempio del pattino), sistemi con vincoli posizionali non regolari (come un punto vincolato a una superficie conica).

**Esempio 2.1 (Vincolo integrabile).** Supponiamo di avere un punto materiale  $P$  sottoposto al seguente vincolo: la sua velocità resta sempre perpendicolare al vettore posizione  $(P - O)$ .

Tale vincolo si esprime tramite la formula

$$\mathbf{v}_P \cdot (P - O) = 0,$$

che si può scrivere come

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |P - O|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |P - O| = \text{costante.}$$

Quindi il vincolo è riconducibile a un vincolo posizionale: il sistema è olonomo. ★

**Esempio 2.2 (Il pattino).** Consideriamo un sistema di due punti materiali  $A, B$  che si muovono sul piano  $xy$  restando a distanza fissa  $\ell$  e in modo che il loro punto medio abbia velocità parallela alla retta che passa per i due punti.

Con ovvie notazioni i vincoli si possono esprimere mediante le relazioni

$$z_A = 0, \quad z_B = 0 \tag{4}$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - \ell^2 = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\dot{x}_A + \dot{x}_B}{x_A - x_B} = \frac{\dot{y}_A + \dot{y}_B}{y_A - y_B} \quad \Rightarrow \quad (y_A - y_B)(\dot{x}_A + \dot{x}_B) - (x_A - x_B)(\dot{y}_A + \dot{y}_B) = 0. \tag{6}$$

L'ultima relazione però non è esprimibile come vincolo sulle posizioni (si dice che non è *integrabile*), quindi il sistema non è olonomo.<sup>(5)</sup> Infatti, supponiamo per assurdo che esista

---

<sup>(5)</sup>Una dimostrazione rigorosa si basa sul *Teorema di Frobenius*, che ha come conseguenza il seguente

**Corollario 2.3.** *Un vincolo (pfaffiano) del tipo*

$$A_1(\mathbf{x})\dot{x}_1 + \cdots + A_k(\mathbf{x})\dot{x}_k = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$$

*è integrabile, cioè si può ottenere derivando rispetto al tempo una funzione  $f(\mathbf{x})$ , se e solo se*

$$A_\alpha \left( \frac{\partial A_\gamma}{\partial \beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial \gamma} \right) + A_\beta \left( \frac{\partial A_\alpha}{\partial \gamma} - \frac{\partial A_\gamma}{\partial \alpha} \right) + A_\gamma \left( \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} \right) = 0$$

*per ogni  $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, k$ .*

una funzione regolare  $f$  tale che il vincolo si esprima come

$$f(x_A, y_A, x_B, y_B) = 0.$$

Allora, derivando (totalmente) rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x_A} \dot{x}_A + \frac{\partial f}{\partial y_A} \dot{y}_A + \frac{\partial f}{\partial x_B} \dot{x}_B + \frac{\partial f}{\partial y_B} \dot{y}_B = 0$$

e questa espressione deve essere equivalente alla (6). Ma per l'arbitrarietà delle velocità dovrebbe essere

$$\frac{\partial f}{\partial x_A} = k(y_A - y_B), \quad \frac{\partial f}{\partial y_A} = -k(x_A - x_B),$$

per qualche costante  $k \neq 0$ , e questo non è possibile perché dalle condizioni delle derivate incrociate deve essere

$$k = \frac{\partial}{\partial y_A} \left( \frac{\partial f}{\partial x_A} \right) = \frac{\partial}{\partial x_A} \left( \frac{\partial f}{\partial y_A} \right) = -k,$$

da cui ne verrebbe  $k = 0$ , che è assurdo. \*

### 3 Le tre forme delle equazioni di Lagrange

Dato il vettore configurazione  $\mathbf{c}_s(\mathbf{q}, t)$ , la velocità in coordinate lagrangiane del punto  $P_s$  si scrive usando il *Teorema del differenziale totale* come

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial q_i}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial t}(\mathbf{q}, t). \quad (7)$$

Si noti che, anche se l'indice di sommatoria è muto, tenderemo ad utilizzare l'indice  $s$  quando le somme sono sui punti materiali, mentre useremo l'indice  $i$  quando sono sui parametri lagrangiani.

Poiché le velocità virtuali  $\mathbf{w}_s$  si considerano a vincoli congelati nell'istante  $t$ , in coordinate lagrangiane si ha

$$\mathbf{w}_s(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial q_i}(\mathbf{q}, t) w_i, \quad w_i \in \mathbb{R}.$$

Denotando con  $\mathbf{F}_s$  la risultante delle forze esterne sul punto  $P_s$  e con  $\mathbf{p}_s = m_s \mathbf{v}_s$  la quantità di moto del punto  $P_s$ , il *principio di D'Alembert* dice che il moto di un sistema meccanico è caratterizzato da

$$\sum_{s=1}^N (\mathbf{F}_s - \dot{\mathbf{p}}_s) \cdot \mathbf{w}_s = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{w}_s.$$

Sostituendo l'espressione delle velocità virtuali otteniamo

$$\sum_{s=1}^N (\mathbf{F}_s - \dot{\mathbf{p}}_s) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial q_i} w_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{s=1}^N (\mathbf{F}_s - \dot{\mathbf{p}}_s) \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial q_i} \right) w_i = \mathbf{0}, \quad \forall w_i \in \mathbb{R},$$

dove abbiamo usato la bilinearità del prodotto scalare. Poniamo ora

$$Q_i := \sum_{s=1}^N \mathbf{F}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial q_i}, \quad \tau_i := \sum_{s=1}^N \dot{\mathbf{p}}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

dette rispettivamente *componenti lagrangiane delle forze* e *componenti lagrangiane delle accelerazioni*. Dall'arbitrarietà delle  $w_i$  otteniamo le  $n$  equazioni

$$\tau_i = Q_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

dette *equazioni di Lagrange nella prima forma*.

Dimostriamo ora un teorema.

**Teorema 3.1.** *Se le masse sono costanti,<sup>(6)</sup> allora*

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

dove

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s |\mathbf{v}_s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)|^2$$

è l'*energia cinetica di un sistema olonomo*.

*Dimostrazione.* Dalla (7) si ha, derivando rispetto a  $\dot{q}_i$ ,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial q_i}.$$

Per definizione di  $\tau_i$  e usando la formula appena trovata segue

$$\begin{aligned} \tau_i &= \sum_{s=1}^N m_s \dot{\mathbf{v}}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial q_i} = \sum_{s=1}^N m_s \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial q_i} \right) - \sum_{s=1}^N m_s \mathbf{v}_s \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial q_i} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{s=1}^N m_s \mathbf{v}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum_{s=1}^N m_s \mathbf{v}_s \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d \mathbf{c}_s}{dt} \end{aligned}$$

dove nell'ultimo termine abbiamo scambiato la derivata rispetto a  $t$  con quella rispetto a  $q_i$ . Il termine tra la parentesi è la derivata di  $K$  rispetto a  $\dot{q}_i$ , mentre  $\frac{d \mathbf{c}_s}{dt}$  è la velocità  $\mathbf{v}_s$ , quindi

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{s=1}^N m_s \mathbf{v}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i}. \quad \square$$

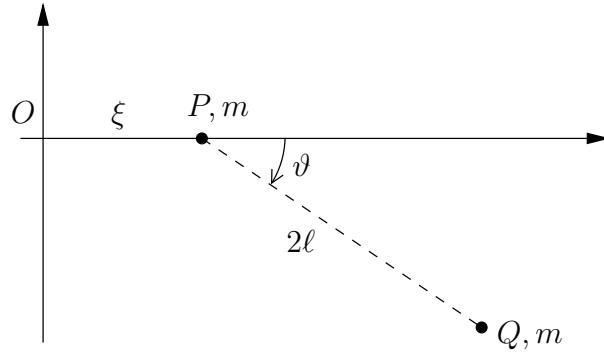
Da questo teorema segue immediatamente la *seconda forma delle equazioni di Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

**Esempio 3.2 (Pendolo con polo mobile).** In un piano verticale, un corpo rigido è formato da due punti materiali  $P$  e  $Q$ , entrambi di massa  $m$ , posti a distanza  $2\ell$ . Il punto  $P$  è vincolato a muoversi in modo liscio su un asse fisso orizzontale e il sistema è soggetto alla forza peso.

---

<sup>(6)</sup>Il teorema vale anche nel caso in cui le masse dipendano dal tempo; l'essenziale è che non dipendano dalle  $\mathbf{q}$  e dalle  $\dot{\mathbf{q}}$ .



Il sistema ha due gradi di libertà. Usando i parametri indicati in figura, si ha

$$(P - O) = \xi \mathbf{e}_x, \quad (Q - O) = (\xi + 2\ell \cos \vartheta) \mathbf{e}_x - 2\ell \sin \vartheta \mathbf{e}_y.$$

Si trova che

$$K = m\ddot{\xi}^2 - 2m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta} \sin \vartheta + 2m\ell^2\dot{\vartheta}^2,$$

e dunque

$$\begin{aligned} \tau_\xi &= 2m\ddot{\xi} - 2m\ell\ddot{\vartheta} \sin \vartheta - 2m\ell\dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta \\ \tau_\vartheta &= -2m\ell\ddot{\xi} \sin \vartheta + 4m\ell^2\ddot{\vartheta}. \end{aligned}$$

Inoltre le componenti lagrangiane delle forze si scrivono

$$Q_\xi = 0, \quad Q_\vartheta = 2mg\ell \cos \vartheta.$$

Quindi le equazioni di Lagrange nella seconda forma si scrivono

$$\begin{cases} 2m\ddot{\xi} - 2m\ell\ddot{\vartheta} \sin \vartheta - 2m\ell\dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta = 0 \\ -2m\ell\ddot{\xi} \sin \vartheta + 4m\ell^2\ddot{\vartheta} = 2mg\ell \cos \vartheta. \end{cases}$$
★

**Definizione 3.3.** Un campo di forze di componenti lagrangiane  $Q_i$  si dice che ammette un *potenziale generalizzato* se esiste una funzione

$$U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

tale che

$$Q_i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$
★

Se  $\mathbf{q}$  ammette un potenziale generalizzato, si giunge alla *terza forma delle equazioni di Lagrange*: definendo la *funzione lagrangiana*

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

le equazioni del moto di un sistema sono date da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Esse vengono anche dette semplicemente *equazioni di Lagrange*. Nel caso di un sistema olonomo, quindi, se le forze ammettono potenziale generalizzato la funzione lagrangiana permette di ricavare il moto del sistema.

**Definizione 3.4 (Sistema lagrangiano).** Un sistema meccanico olonomo dotato di potenziale generalizzato, ovvero per cui è possibile definire la lagrangiana  $\mathcal{L}$ , si dice *sistema lagrangiano*. ★

## 4 L'azione lagrangiana

Vediamo ora un modo completamente diverso di ottenere le equazioni di Lagrange del moto di un sistema. Tale modo è basato sul cosiddetto *Calcolo delle variazioni*, un settore molto importante dell'Analisi matematica.

**Definizione 4.1 (Azione lagrangiana).** Siano  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$  con  $t_0 < t_1$ . Denotiamo con  $C^2([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$  l'insieme delle funzioni  $\mathbf{q} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  derivabili due volte con derivata seconda continua. Data una lagrangiana  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , l'*azione lagrangiana* è il funzionale

$$S_{\mathcal{L}} : C^2([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

definito da

$$S_{\mathcal{L}}[\mathbf{q}] := \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt. ★$$

Vogliamo ora dare una definizione di punto critico o stazionario per il funzionale  $S_{\mathcal{L}}$ . Avendo come dominio uno spazio di dimensione infinita, è più complicato introdurre un concetto di gradiente. La derivata direzionale però è più facile da introdurre (ovviamente la "direzione" sarà data da una funzione  $\boldsymbol{\eta}$ ). Quindi diremo che un punto è stazionario se tutte le derivate direzionali calcolate in quel punto sono nulle. La derivata direzionale di  $S_{\mathcal{L}}$  nel punto  $\bar{\mathbf{q}}$  lungo la direzione  $\boldsymbol{\eta}$  è data da

$$\frac{d}{ds} S_{\mathcal{L}}[\bar{\mathbf{q}} + s\boldsymbol{\eta}] \Big|_{s=0}.$$

**Definizione 4.2 (Punto stazionario).** Una funzione  $\bar{\mathbf{q}} \in C^2([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$  è un *punto stazionario* per l'azione lagrangiana  $S_{\mathcal{L}}$  se per ogni  $\boldsymbol{\eta} \in C^2([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$  con  $\boldsymbol{\eta}(t_0) = \boldsymbol{\eta}(t_1) = \mathbf{0}$  si ha

$$\frac{d}{ds} S_{\mathcal{L}}[\bar{\mathbf{q}} + s\boldsymbol{\eta}] \Big|_{s=0} = 0. ★$$

Si noti che si considerano solo le funzioni  $\boldsymbol{\eta}$  che si annullano agli estremi dell'intervallo, in modo che le condizioni iniziali e finali per le funzioni  $\bar{\mathbf{q}}$  e  $\bar{\mathbf{q}} + s\boldsymbol{\eta}$  siano le stesse per ogni  $s$ .

Vediamo ora che esiste un legame molto importante tra i moti del sistema e i punti stazionari di  $S_{\mathcal{L}}$ .

**Teorema 4.3 (Principio dell'azione stazionaria lagrangiana).** Una funzione

$$\mathbf{q} \in C^2([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$$

è moto di un sistema con lagrangiana  $\mathcal{L}$  se e solo se essa è un punto stazionario per l'azione lagrangiana  $S_{\mathcal{L}}$ .

*Dimostrazione.* Per ogni funzione  $\boldsymbol{\eta} \in C^2([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$  con  $\boldsymbol{\eta}(t_0) = \boldsymbol{\eta}(t_1) = \mathbf{0}$ , calcoliamo la derivata direzionale in  $\mathbf{q}$  lungo  $\boldsymbol{\eta}$ , usando il Teorema di derivazione sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} S_{\mathcal{L}}[\mathbf{q} + s\boldsymbol{\eta}] \Big|_{s=0} &= \frac{d}{ds} \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\mathbf{q}(t) + s\boldsymbol{\eta}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + s\dot{\boldsymbol{\eta}}(t), t) dt \Big|_{s=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \cdot \boldsymbol{\eta}(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \right] dt\end{aligned}$$

Ora riscriviamo l'ultimo addendo come derivata di un prodotto:

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \cdot \boldsymbol{\eta}(t) \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \right) \cdot \boldsymbol{\eta}(t) \right] dt \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \right) \cdot \boldsymbol{\eta}(t) dt\end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che  $\boldsymbol{\eta}$  si annulla agli estremi dell'intervallo. Quindi in definitiva troviamo l'interessante formula

$$\frac{d}{ds} S_{\mathcal{L}}[\mathbf{q} + s\boldsymbol{\eta}] \Big|_{s=0} = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \right) \right] \cdot \boldsymbol{\eta}(t) dt \quad (11)$$

Supponiamo ora che  $\mathbf{q}$  sia un moto del sistema: allora esso soddisfa le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = 0$$

e quindi la parentesi quadra nella (11) si annulla per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ . Quindi il membro di destra della (11) è nullo per ogni  $\boldsymbol{\eta}$ , e dunque  $\mathbf{q}$  è un punto stazionario per  $S_{\mathcal{L}}$ .

Viceversa, supponiamo che  $\mathbf{q}$  sia stazionario per  $S_{\mathcal{L}}$ ; allora il membro di destra della (11) è nullo per ogni  $\boldsymbol{\eta}$ . Poniamo per un attimo

$$\mathbf{g}(t) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \right),$$

e notiamo che  $\mathbf{g}$  è una funzione continua del tempo. Allora abbiamo che

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{g}(t) \cdot \boldsymbol{\eta}(t) dt = 0$$

per ogni  $\boldsymbol{\eta} \in C^2([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$  con  $\boldsymbol{\eta}(t_0) = \boldsymbol{\eta}(t_1) = \mathbf{0}$ . Da qui si deduce che  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ . Infatti, supponiamo per assurdo che esista  $t_0 < t^* < t_1$  tale che  $\mathbf{g}(t^*) \neq \mathbf{0}$ . Questo vuol dire che per almeno una componente  $g_i$  si ha  $g_i(t^*) > 0$  oppure  $g_i(t^*) < 0$ . Nel primo caso, per il Teorema della permanenza del segno esiste un intorno  $(t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon)$ , strettamente contenuto in  $(t_0, t_1)$ , tale che  $g_i > 0$  su tutto l'intorno; scegliendo  $\boldsymbol{\eta}$  di classe  $C^2$  in modo che  $\eta_i > 0$  solo su quell'intorno<sup>(7)</sup> e  $\eta_j = 0$  per  $j \neq i$ , si ha

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{g}(t) \cdot \boldsymbol{\eta}(t) dt = \int_{t^* - \varepsilon}^{t^* + \varepsilon} g_i(t) \eta_i(t) dt > 0,$$

---

<sup>(7)</sup>Si può ad esempio usare la funzione

$$\eta_i(t) = \begin{cases} (\varepsilon^2 - (t - t^*)^2)^3 & \text{se } |t - t^*| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

contro l'ipotesi. Se  $g_i(t^*) < 0$  si procede in modo analogo.  $\square$

Il Principio dell'azione stazionaria lagrangiana è anche noto come *Principio di minima azione*, perché si può dimostrare che i moti del sistema non solo rendono stazionaria l'azione  $S_{\mathcal{L}}$ , ma la rendono anche localmente minima, in un senso opportuno. Per una dimostrazione di questo fatto si veda [1].

## 5 Potenziale generalizzato ed energia cinetica

Analizziamo ora in dettaglio i campi di forze che ammettono potenziale generalizzato. Il seguente teorema mostra che il potenziale generalizzato, se esiste, deve essere una funzione di primo grado in  $\dot{\mathbf{q}}$  e anche il campo di forze che lo ammette deve essere di primo grado in  $\dot{\mathbf{q}}$  con matrice antisimmetrica.

**Teorema 5.1.** *Sia  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  un campo di forze che ammette potenziale generalizzato  $U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ . Allora esistono una matrice antisimmetrica  $\mathbb{U}(\mathbf{q}, t)$ , un vettore  $\mathbf{u}(\mathbf{q}, t)$  di  $\mathbb{R}^n$  e un potenziale ordinario  $U_0(\mathbf{q}, t)$  tali che*

$$U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + U_0(\mathbf{q}, t), \quad (12)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbb{U}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{q}, t) + \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t). \quad (13)$$

*Dimostrazione.* Il potenziale generalizzato è tale che  $Q_i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}$ . Esprimiamo la derivata temporale mediante il teorema del differenziale totale:

$$Q_i = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \ddot{q}_j - \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Poiché però le forze non possono dipendere da  $\ddot{\mathbf{q}}$ , si deve avere

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} = 0 \quad \text{per ogni } i, j$$

e dunque  $U$  deve essere di primo grado in  $\dot{\mathbf{q}}$ . La (12) è così dimostrata. Se ora risostituiamo la formula appena trovata nell'espressione di  $Q_i$  abbiamo

$$Q_i = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial U_0}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial u_j}{\partial q_i} - \frac{\partial u_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j - \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial U_0}{\partial q_i}.$$

Ponendo  $\mathbb{U}_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial q_i} - \frac{\partial u_i}{\partial q_j}$  otteniamo la tesi.  $\square$

Tutti i campi di forze conservativi ammettono potenziale generalizzato: basta considerare il potenziale ordinario  $U_0$ . Sono invece poche le forze veramente dipendenti dalla velocità che ammettono potenziale generalizzato: tra queste troviamo la forza di Lorentz e la forza di Coriolis.

**Esempio 5.2 (Forza di Lorentz).** La forza di Lorentz  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  agente su un punto materiale di carica elettrica  $q$ , se il campo magnetico  $\mathbf{B}$  è costante, ammette potenziale generalizzato. Infatti: denotiamo con  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  la posizione del punto e consideriamo la funzione

$$U(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) := \frac{1}{2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{2} q \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}.$$

Si ha, usando le proprietà del prodotto misto:

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{1}{2} q \mathbf{B} \times \mathbf{x}, \quad \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{2} q \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B},$$

e dunque

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{x}}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{1}{2} q \mathbf{B} \times \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} q \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} = q \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}.$$

Si noti che in questo caso si ha

$$\mathbb{U} = q \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

dove  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ . ★

**Teorema 5.3 (Rappresentazione dell'energia cinetica).** *In un sistema olonomo, l'energia cinetica è un polinomio di secondo grado nelle  $\dot{\mathbf{q}}$ , in cui il termine di secondo grado è una forma quadratica definita positiva. Se i vincoli sono fissi, allora il polinomio è anche omogeneo nelle  $\dot{\mathbf{q}}$ . Quindi*

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbb{K}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}_0(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} K_{00}(\mathbf{q}, t),$$

dove  $\mathbb{K}(\mathbf{q}, t)$  è una matrice  $n \times n$  simmetrica e definita positiva,  $\mathbf{k}_0(\mathbf{q}, t)$  è un vettore di  $\mathbb{R}^n$  e  $K_{00}(\mathbf{q}, t)$  uno scalare.

*Dimostrazione.* Sostituendo l'espressione della velocità (7) nell'energia cinetica  $K = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s |\mathbf{v}_s|^2$  e svolgendo i conti, si trova la formula ponendo

$$\mathbb{K}_{ij} := \sum_{s=1}^N m_s \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial q_j}, \quad k_{0i} := \sum_{s=1}^N m_s \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial t}, \quad K_{00} := \sum_{s=1}^N m_s \left| \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial t} \right|^2.$$

Si vede facilmente che se i vincoli sono fissi (ovvero se  $\mathbf{c}_s$  non dipende esplicitamente da  $t$ ), si ha  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{0}$  e  $K_{00} = 0$ .

Ora mostriamo che  $\mathbb{K}$  è definita positiva. Se i vincoli sono fissi si ha

$$0 \leq K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbb{K}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

e dunque  $\mathbb{K}$  è semidefinita positiva. Se poi  $K = 0$ , allora  $\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$  per ogni  $s = 1, \dots, N$  e dunque

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_s = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad \text{per ogni } s \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i = 0 \quad \text{per ogni } i$$

(segue dal fatto che i parametri lagrangiani sono necessari e sufficienti per descrivere le posizioni di un sistema olonomo). Quindi  $\mathbb{K}$  è definita positiva.

Se i vincoli non sono fissi, diagonalizziamo la matrice  $\mathbb{K}$  (che è simmetrica) e mettiamoci nella base degli autovettori, in modo che si abbia, denotando con  $\lambda_i$  gli autovalori di  $\mathbb{K}$ ,

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i \dot{q}_i^2 + \sum_{i=1}^n k_{0i} \dot{q}_i + \frac{1}{2} K_{00}.$$

Fissiamo ora un indice  $j$  tra 1 e  $n$  e scegliamo  $\dot{q}_i = 0$  per ogni  $i \neq j$ . Si ottiene

$$0 \leq K = \frac{1}{2} \lambda_j \dot{q}_j^2 + k_{0j} \dot{q}_j + \frac{1}{2} K_{00},$$

che è un polinomio di secondo grado in  $\dot{q}_j$ . Poiché tale polinomio non può mai diventare negativo, il coefficiente di grado massimo deve essere non negativo, cioè  $\lambda_j \geq 0$ .

Se poi fosse  $\lambda_j = 0$ , allora si avrebbe

$$0 \leq K = k_{0j} \dot{q}_j + \frac{1}{2} K_{00},$$

che è di primo grado in  $\dot{q}_j$  e deve essere sempre positivo. Questo è possibile solo se  $k_{0j} = 0$ , ma ne seguirebbe che i  $\mathbf{c}_s$  non dipendono dal tempo, contro l'ipotesi che i vincoli non siano fissi. Quindi tutti gli autovalori sono strettamente positivi.  $\square$

Dalla definitezza positiva di  $\mathbb{K}$  segue un fatto molto importante dal punto di vista analitico.

**Teorema 5.4 (Forma normale delle equazioni del moto).** *Il sistema di equazioni del moto di Lagrange  $\tau_i = Q_i$  si può sempre mettere in forma normale.*

*Dimostrazione.* Dai teoremi 3.1 e 5.3 segue che la dipendenza di  $\boldsymbol{\tau}$  da  $\ddot{\mathbf{q}}$  è lineare:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbb{K}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).^{(8)}$$

Poiché  $\mathbb{K}$  è definita positiva, in particolare è invertibile e dunque il sistema di equazioni differenziali si può scrivere come

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbb{K}^{-1}(\mathbf{q}, t) (\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathbf{R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)),$$

ovvero è esprimibile in forma normale.  $\square$

**Teorema 5.5 (Teorema delle forze vive).** *In un sistema olonomo a vincoli fissi, lungo un moto la derivata dell'energia cinetica egualia la potenza delle forze, ovvero:*

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^n Q_i \dot{q}_i = \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}}.$$

---

<sup>(8)</sup>Nel caso di sistema a vincoli fissi si ha

$$\tau_i = (\dot{\mathbb{K}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbb{K}\ddot{\mathbf{q}})_i - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\dot{\mathbb{K}}\dot{\mathbf{q}})_i - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}.$$

*Dimostrazione.* Tenendo conto che  $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  non dipende dal tempo, mediante il teorema del differenziale totale sviluppiamone la derivata:

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \cdot \dot{\mathbf{q}} \\ &= \left[ \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right] \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \right) = -\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \right) = -\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \right).\end{aligned}$$

Visto che  $K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbb{K} \dot{\mathbf{q}}$ , l'ultimo termine tra parentesi si scrive come

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbb{K} \dot{\mathbf{q}} = 2K$$

e quindi

$$\frac{dK}{dt} = -\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}} + 2 \frac{dK}{dt}$$

da cui la tesi.  $\square$

Se ora consideriamo delle forze  $\mathbf{Q}$  che ammettono potenziale generalizzato, abbiamo

$$\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbb{U} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \left( -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{q}} \right) \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

dove abbiamo tenuto conto che  $\mathbb{U}$  è antisimmetrica. Poiché si ha, dal Teorema del differenziale totale,

$$\frac{dU_0}{dt} = \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial U_0}{\partial t},$$

applicando il Teorema delle forze vive troviamo

$$\frac{dK}{dt} = \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \frac{dU_0}{dt} - \frac{\partial U_0}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \dot{\mathbf{q}},$$

e ponendo  $E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U_0(\mathbf{q}, t)$ , detta *energia meccanica*, troviamo

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial U_0}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \dot{\mathbf{q}}.$$

In particolare, nel caso in cui anche le forze non dipendano dal tempo, resta dimostrato il seguente teorema:

**Teorema 5.6 (Teorema dell'energia meccanica).** *In un sistema meccanico lagrangiano a vincoli fissi e forze indipendenti dal tempo, lungo ogni moto del sistema si ha*

$$\frac{dE}{dt} = 0,$$

dove  $E = K - U_0$  è l'*energia meccanica*. Quindi  $E$  è costante lungo ogni moto.

## 6 Stabilità dell'equilibrio

In un sistema meccanico olonomo le equazioni differenziali del moto si presentano nella forma

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t);$$

ponendo  $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{q}}$ , il sistema si può riscrivere facendo comparire solo le derivate prime (ma raddoppiando il numero delle incognite):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{G}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t). \end{cases} \quad (14)$$

**Definizione 6.1.** Un *sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale* è dato da

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t), t)$$

dove  $\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $I$  intervallo aperto in  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Se  $\mathbf{F}$  non dipende esplicitamente dal tempo, cioè se il sistema si presenta nella forma  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$ , allora il sistema si dice *autonomo*.  $\star$

**Definizione 6.2.** Una *soluzione di equilibrio* è una soluzione costante del sistema differenziale  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t)$ , ovvero

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Le soluzioni di equilibrio si trovano risolvendo l'equazione

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}, t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Nel caso di un sistema autonomo le soluzioni di equilibrio sono gli zeri della funzione  $\mathbf{F}$ .  $\star$

**Definizione 6.3.** Una soluzione di equilibrio  $\bar{\mathbf{u}}$  del sistema autonomo  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$  si dice *stabile* se per ogni intorno  $V$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  esiste un intorno  $U$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  tale che per ogni  $\mathbf{u}_0 \in U$  si abbia

$$\mathbf{u}(t; 0, \mathbf{u}_0) \in V \quad \text{per ogni } t \geq 0,$$

dove  $\mathbf{u}(t; 0, \mathbf{u}_0)$  è la soluzione al tempo  $t$  con condizione iniziale  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ .

L'equilibrio si dice *instabile* se non è stabile.  $\star$

Poiché  $\mathbb{R}^m$  è uno spazio normato e la topologia usata è quella indotta dalla norma euclidea, si dimostra facilmente che una soluzione di equilibrio  $\bar{\mathbf{u}}$  è stabile se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\mathbf{u}_0 - \bar{\mathbf{u}}| < \delta \Rightarrow \forall t \geq 0 : |\mathbf{u}(t; 0, \mathbf{u}_0) - \bar{\mathbf{u}}| < \varepsilon.$$

Tornando a un sistema meccanico olonomo nella forma (14), le posizioni di equilibrio si trovano risolvendo

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

ossia cercando le posizioni  $\bar{\mathbf{q}}$  tali che

$$\mathbf{G}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \quad \text{per ogni } t.$$

Consideriamo ora un sistema meccanico lagrangiano con vincoli fissi e forze indipendenti dal tempo:

$$\mathcal{L} = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Per  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , si ha  $K(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = 0$  e  $U(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = U_0(\mathbf{q})$ , dove  $U_0$  è il potenziale ordinario, e dunque l'equazione per le posizioni di equilibrio diventa semplicemente

$$\frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

Quindi in questo caso le posizioni di equilibrio sono i punti stazionari del potenziale ordinario. Per studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio, abbiamo a disposizione un teorema molto importante.

**Teorema 6.4 (Teorema di Dirichlet-Lagrange).** *Consideriamo ora un sistema meccanico lagrangiano con vincoli fissi e forze indipendenti dal tempo. Se il potenziale ordinario  $U_0$  ha un massimo locale stretto in  $\bar{\mathbf{q}}$ , allora  $\bar{\mathbf{q}}$  è una posizione di equilibrio stabile.*

*Dimostrazione.* Per comodità, supponiamo che  $U_0(\bar{\mathbf{q}}) = 0$  e poniamo  $\mathbf{u} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{0})$ . Consideriamo l'energia meccanica

$$E(\mathbf{u}) = K(\mathbf{u}) - U_0(\mathbf{q}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U_0(\mathbf{q});$$

si ha  $E(\bar{\mathbf{u}}) = 0$  e, poiché  $K$  è positiva e  $U_0$  ha un massimo stretto in  $\bar{\mathbf{q}}$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  sufficientemente piccolo si ha che l'intorno di  $\bar{\mathbf{u}}$

$$B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2n} : |\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}| < \varepsilon\}$$

è tale che  $E(\mathbf{u}) > 0$  per ogni  $\mathbf{u}$  che sta nella chiusura di  $B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$ ,  $\mathbf{u} \neq \bar{\mathbf{u}}$ . Poniamo

$$m_\varepsilon := \min\{E(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \partial B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})\}$$

e osserviamo che  $m_\varepsilon > 0$  poiché  $\partial B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$  è compatto. Dalla continuità di  $E$  segue anche che l'insieme

$$\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2n} : E(\mathbf{u}) < m_\varepsilon\} = E^{-1}(]-\infty, m_\varepsilon[)$$

è un aperto che contiene  $\bar{\mathbf{u}}$ , quindi esiste  $\delta > 0$  tale che  $E(\mathbf{u}) < m_\varepsilon$  per ogni  $\mathbf{u} \in B_\delta(\bar{\mathbf{u}})$ .

Per il Teorema dell'energia meccanica 5.6, la funzione  $E$  è costante sui moti del sistema, quindi

$$E(\mathbf{u}(t)) < m_\varepsilon \quad \text{per ogni } \mathbf{u}_0 \in B_\delta(\bar{\mathbf{u}}) \text{ e per ogni } t \geq 0, \tag{15}$$

dove  $\mathbf{u}(t)$  è la soluzione all'istante  $t$  con condizione iniziale  $\mathbf{u}_0$ . Questo implica che  $\mathbf{u}(t) \in B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$  per ogni  $t \geq 0$ , perché altrimenti per assurdo si troverebbe un istante  $\bar{t} > 0$  in cui

$$E(\mathbf{u}(\bar{t})) \geq m_\varepsilon,$$

contro la (15). □

Si noti che il teorema vale anche nel caso più generale in cui il sistema sia soggetto anche a forze *dissipative*, cioè forze per cui la potenza sia negativa:

$$\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}} \leq 0.$$

In questo caso infatti la funzione

$$t \mapsto E(\mathbf{u}(t))$$

è non crescente in  $t$  (anche se potrebbe non essere costante) e la dimostrazione del teorema vale comunque.

## 7 Integrali primi e Teorema di Noether

**Definizione 7.1 (Integrale primo).** Una funzione  $F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  si dice *integrale primo*, o *quantità conservata*, se per ogni moto  $\{t \mapsto \mathbf{q}(t)\}$  del sistema la quantità

$$t \mapsto F(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$$

è costante, cioè (nel caso di  $F$  di classe  $C^1$ ) se

$$\frac{dF}{dt} = 0.$$

★

**Definizione 7.2.** Data un sistema lagrangiano con lagrangiana  $\mathcal{L}$ , definiamo

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

il *momento cinetico* associato a  $q_i$ .

★

Quando una lagrangiana  $\mathcal{L}$  non dipende esplicitamente da una coordinata lagrangiana  $q_i$  (ma dipenderà comunque da  $\dot{q}_i$ ), si dice che  $q_i$  è una *coordinata ciclica* o una *variabile ignorata*.

Si dimostra immediatamente il seguente

**Teorema 7.3.** Se  $q_i$  è una coordinata ciclica, allora momento cinetico associato  $p_i$  è un integrale primo.

**Esempio 7.4.** Con riferimento all'Esempio 3.2 del pendolo con polo mobile, si ha

$$K = m\xi^2 - 2m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta} \sin \vartheta + 2m\ell^2\dot{\vartheta}^2, \quad U = 2mg\ell \sin \vartheta$$

e dunque

$$\mathcal{L}(\xi, \vartheta, \dot{\xi}, \dot{\vartheta}) = m\xi^2 - 2m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta} \sin \vartheta + 2m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + 2mg\ell \sin \vartheta.$$

Poiché  $\mathcal{L}$  non dipende esplicitamente da  $\xi$ , la quantità

$$p_\xi = 2m\dot{\xi} - 2m\ell\dot{\vartheta} \sin \vartheta$$

è un integrale primo del sistema. Tale integrale rappresenta la conservazione della componente orizzontale della quantità di moto, visto che le forze esterne hanno componente orizzontale nulla.

In questo caso, visto che il sistema ha vincoli fissi e le forze sono indipendenti dal tempo, si ha un altro integrale primo: l'energia meccanica

$$E = K - U.$$

I due integrali primi del moto forniscono due equazioni differenziali del primo ordine, sufficienti per determinare il moto del sistema.

★

Il teorema di Noether generalizza l'idea dell'esistenza di una coordinata ciclica al caso di una invarianza più generale. Esso stabilisce che se la lagrangiana ammette certe *simmetrie*, ovvero è invariante rispetto a certe trasformazioni, allora tali trasformazioni producono un integrale primo.

**Definizione 7.5.** Sia  $\mathbf{h}_s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una famiglia di diffeomorfismi che dipenda con regolarità dal parametro  $s$  in un intorno di 0, tale che  $\mathbf{h}_0 = \text{Id}$ . Diciamo che una lagrangiana  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  è (*infinitesimalmente*) *invariante* rispetto alla famiglia di diffeomorfismi se, posto  $\mathbf{q}^s(t) = \mathbf{h}_s(\mathbf{q}(t))$ , si ha

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\mathbf{q}^s(t), \dot{\mathbf{q}}^s(t), t) \Big|_{s=0} = 0 \quad \text{per ogni } t \in I.$$

★

Spesso si ha addirittura che la funzione  $\mathcal{L}(\mathbf{q}^s(t), \dot{\mathbf{q}}^s(t), t)$  non dipende esplicitamente da  $s$ , ovvero che

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}^s(t), \dot{\mathbf{q}}^s(t), t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$$

per ogni  $s$ . In questo caso si dice che la lagrangiana è *finitamente invariante*.

Ad esempio, se  $q_i$  è una coordinata ciclica per  $\mathcal{L}$ , allora la lagrangiana è (finitamente) invariante per la famiglia di trasformazioni

$$\mathbf{h}_s(\mathbf{q}) = (q_1, \dots, q_i + s, \dots, q_n).$$

**Teorema 7.6 (Teorema di Noether).** Se  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  è (*infinitesimalmente*) invariante rispetto a una famiglia di trasformazioni  $\{\mathbf{h}_s\}$ , allora la quantità

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{h}_s(\mathbf{q})}{\partial s} \Big|_{s=0}$$

è un integrale primo.

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{q}(t)$  un moto del sistema e poniamo  $\mathbf{q}^s(t) = \mathbf{h}_s(\mathbf{q}(t))$ . Allora si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}^s(t)}{\partial s} \Big|_{s=0} \right) \\ &= \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}^s(t)}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{q}^s(t)}{\partial s} \right) \right]_{s=0} \\ &= \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}^s(t)}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^s(t)}{\partial s} \right]_{s=0} = \frac{d}{ds} \mathcal{L}(\mathbf{q}^s(t), \dot{\mathbf{q}}^s(t), t) \Big|_{s=0} = 0 \end{aligned}$$

e quindi la quantità  $I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  è un integrale primo. □

Nell'esempio dato sopra di lagrangiana con variabile ciclica, si ha

$$\frac{\partial \mathbf{h}_s(\mathbf{q})}{\partial s} \Big|_{s=0} = (0, \dots, 1, \dots, 0),$$

da cui

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot (0, \dots, 1, \dots, 0) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

e quindi si ottiene la conservazione del momento cinetico associato.

**Esempio 7.7 (Punto soggetto a una forza elastica).** Si consideri in un piano orizzontale un punto materiale libero di massa  $m$  soggetto a una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo l'origine.

Scegliendo  $x$  e  $y$  del punto come parametri lagrangiani, si ha

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2).$$

In questo caso non ci sono variabili cicliche, ma considerando la famiglia di trasformazioni  $\mathbf{h}_s(x, y) = (x - sy, y + sx)$  si ha

$$\mathcal{L}(x - sy, y + sx, \dot{x} - s\dot{y}, \dot{y} + s\dot{x}) = \mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + \frac{1}{2}ms^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}ks^2(x^2 + y^2).$$

Poiché il parametro  $s$  compare solo elevato al quadrato, è facile vedere che la lagrangiana è infinitesimalmente invariante rispetto alla famiglia di trasformazioni proposta, cioè

$$\left. \frac{d}{ds} \mathcal{L}(\mathbf{q}^s(t), \dot{\mathbf{q}}^s(t), t) \right|_{s=0} = 0.$$

Quindi il Teorema di Noether implica che la quantità

$$I = m\dot{x}\dot{y} - m\dot{y}\dot{x} = m(\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x})$$

è un integrale primo (che in questo caso corrisponde alla conservazione del momento della quantità di moto).

Come si può notare, a volte non è semplice intuire se esista e quale sia la trasformazione che lascia invariata la lagrangiana. Molto dipende dai parametri lagrangiani scelti: se invece di usare  $(x, y)$  avessimo usato le coordinate polari  $(r, \vartheta)$ , la lagrangiana sarebbe diventata

$$\mathcal{L}(r, \vartheta, \dot{r}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) - \frac{1}{2}kr^2,$$

lasciando immediatamente trasparire che  $\vartheta$  è variabile ciclica e quindi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta}$$

è integrale primo (ed è lo stesso di prima). ★

## 8 Hamiltoniana

Consideriamo un sistema lagrangiano con lagrangiana  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ .

**Definizione 8.1 (Hamiltoniana).** Per ogni  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times I$  definiamo

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) := \sup_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t)\}. \quad (16)$$

La funzione  $\mathcal{H}$  viene detta *funzione di Hamilton* o *hamiltoniana* del sistema meccanico. ★

Si noti che la variabile muta  $\mathbf{v}$  ha il ruolo di  $\dot{\mathbf{q}}$  nella lagrangiana. La definizione (16) viene detta *trasformata di Legendre* di  $\mathcal{L}$  e si basa sulla convessità della lagrangiana rispetto a  $\dot{\mathbf{q}}$ . Si verifica che la trasformata di Legendre è un'operazione involutoria, ovvero la trasformata di Legendre di  $\mathcal{H}$  torna ad essere  $\mathcal{L}$ .

**Proposizione 8.2.** Il sup nella formula (16) è un massimo assoluto e il punto di massimo è unico. Tale punto di massimo verrà denotato come  $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo la funzione da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t)$$

e cerchiamone i punti critici facendone il gradiente rispetto a  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{p} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{0}. \quad (17)$$

Tenendo conto della struttura della lagrangiana (grazie ai teoremi di rappresentazione dell'energia cinetica e del potenziale generalizzato) troviamo

$$\mathbf{p} - \mathbb{K}(\mathbf{q}, t)\mathbf{v} - \mathbf{k}_0(\mathbf{q}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$$

Otteniamo così un sistema lineare nell'incognita  $\mathbf{v}$ , che ammette soluzione unica poiché la matrice  $\mathbb{K}$  è invertibile. Tale soluzione è data da

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbb{K}^{-1}(\mathbf{q}, t)(\mathbf{p} - \mathbf{k}_0(\mathbf{q}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{q}, t)). \quad (18)$$

Se ora si calcola l'hessiano della funzione di partenza derivando un'altra volta rispetto a  $\mathbf{v}$ , si ottiene la matrice

$$-\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = -\mathbb{K}(\mathbf{q}, t),$$

che è definita negativa, quindi il punto trovato è di massimo (assoluto).  $\square$

L'equazione (17) è molto importante perché ci dà un legame tra le "nuove" variabili  $\mathbf{p}$  e le variabili lagrangiane: grazie alla Definizione 7.2 abbiamo che le variabili  $\mathbf{p}$  nell'hamiltoniana sono proprio i momenti cinetici associati alle  $\mathbf{q}$ .

Sostituendo l'espressione del punto di massimo nella (16), si ottiene la definizione esplicita

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{k}_0(\mathbf{q}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{q}, t)) \cdot \mathbb{K}^{-1}(\mathbf{q}, t)(\mathbf{p} - \mathbf{k}_0(\mathbf{q}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{q}, t)) \\ &\quad - \frac{1}{2}K_{00}(\mathbf{q}, t) - U_0(\mathbf{q}, t). \end{aligned} \quad (19)$$

In particolare, nel caso a vicoli fissi e forze indipendenti dal tempo e conservative, si ha  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{u} = \mathbf{0}$  e  $K_{00} = 0$ , da cui

$$\mathbf{p} = \mathbb{K}\dot{\mathbf{q}}, \quad \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2}\mathbf{p} \cdot \mathbb{K}^{-1}(\mathbf{q}, t)\mathbf{p} - U_0(\mathbf{q}, t).$$

Poiché il primo termine è l'energia cinetica (espressa in funzione di  $\mathbf{p}$  e non di  $\dot{\mathbf{q}}$ ), si ottiene proprio l'energia meccanica. Quindi in questo caso l'hamiltoniana è un integrale primo del moto.

**Esempio 8.3.** Nel caso di un punto materiale di massa  $m$  che si muove su una retta fissa sotto l'azione di forze conservative indipendenti dal tempo di potenziale  $U(x)$ , si ha

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(x, p) = \frac{p^2}{2m} - U(x). \quad *$$

**Esempio 8.4.** Nel caso del pendolo con polo mobile studiato negli Esempi 3.2 e 7.4, abbiamo che

$$\mathcal{L}(\xi, \vartheta, \dot{\xi}, \dot{\vartheta}) = m\dot{\xi}^2 - 2m\ell\dot{\xi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta + 2m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + 2mg\ell\sin\vartheta.$$

Con alcuni passaggi, in questo caso si verifica che

$$\mathcal{H}(\xi, \vartheta, p_\xi, p_\vartheta) = \frac{1}{2 - \sin^2 \vartheta} \left( \frac{p_\xi^2}{m} + \frac{p_\xi p_\vartheta}{m\ell} \sin\vartheta + \frac{p_\vartheta^2}{2m\ell^2} \right) - 2mg\ell\sin\vartheta. \quad *$$

**Teorema 8.5.** *Tra le derivate di  $\mathcal{L}$  e di  $\mathcal{H}$  valgono le seguenti relazioni:*

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) \quad (22)$$

dove  $\bar{\mathbf{v}}$  è data da (18).

*Dimostrazione.* Usando il fatto che

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t),$$

e che

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t),$$

deriviamo per composizione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} &= \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} &= \bar{v}_i + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial p_i} = \bar{v}_i \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \end{aligned} \quad \square$$

**Teorema 8.6 (Equazioni di Hamilton).** *Sia  $\mathbf{q}(t)$  una funzione del tempo e sia*

$$\mathbf{p}(t) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t). \quad (23)$$

Allora  $\mathbf{q}(t)$  è un moto del sistema se e solo se la coppia  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  soddisfa le equazioni

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t). \end{cases} \quad (24)$$

*Dimostrazione.* Poiché per ogni  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  si ha che  $\bar{\mathbf{v}}$  è l'unica soluzione del sistema  $\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{v}}, t)$ , dalla (23) segue subito che

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t).$$

Quindi dalla (21) si ha

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = \dot{\mathbf{q}}(t)$$

che è la prima equazione.

Supponiamo ora che  $\mathbf{q}(t)$  sia un moto del sistema; allora dalle equazioni di Lagrange si ha

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t)$$

che è la seconda equazione. Viceversa, se la coppia  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  soddisfa le equazioni (24), allora

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \dot{\mathbf{p}}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$$

e dunque valgono le equazioni di Lagrange, cioè  $\mathbf{q}(t)$  è moto del sistema.  $\square$

Le equazioni (24) vengono dette *equazioni di Hamilton*. Si tratta di un sistema differenziale di  $2n$  equazioni del primo ordine nelle incognite  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Il sistema è già scritto in forma normale.

**Teorema 8.7.** *Lungo le soluzioni  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  si ha*

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

*In particolare, se  $\mathcal{H}$  non dipende esplicitamente dal tempo, allora è un integrale primo del sistema.*  $\square$

*Dimostrazione.* Derivando per composizione e usando le equazioni di Hamilton si ha

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad \square$$

Mostriamo ora che anche le equazioni di Hamilton possono essere ottenute da un principio di stazionarietà.

**Definizione 8.8 (Azione hamiltoniana).** Siano  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$  con  $t_0 < t_1$ . Denotiamo con  $C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$  l'insieme delle funzioni derivabili con derivata continua. Data una hamiltoniana  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , si definisce *azione hamiltoniana* il funzionale

$$S_{\mathcal{H}} : C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \times C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

definito da

$$S_{\mathcal{H}}[\mathbf{q}, \mathbf{p}] := \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) - \mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t)] dt.$$

★

Si noti che l'integrando è simile alla trasformata di Legendre di  $\mathcal{H}$  (anche se in questo caso non viene calcolato un massimo), che è proprio  $\mathcal{L}$ , e quindi l'azione hamiltoniana assomiglia molto a quella lagrangiana.

**Teorema 8.9 (Principio dell'azione stazionario hamiltoniana).** *Una coppia di funzioni*

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \times C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$$

*è soluzione delle equazioni di Hamilton (24) con hamiltoniana  $\mathcal{H}$  se e solo se essa è un punto stazionario per l'azione hamiltoniana  $S_{\mathcal{H}}$ .*

*Dimostrazione.* Poniamo

$$\mathbf{z}(t) := (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)), \quad M(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, t) := \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t),$$

dunque

$$S_{\mathcal{H}}[\mathbf{z}] = \int_{t_0}^{t_1} M(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, t), dt.$$

Ripercorrendo la dimostrazione del Teorema 4.3 si mostra che

$$\mathbf{z} \text{ è punto stazionario per } S_{\mathcal{H}} \iff \frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial \dot{\mathbf{z}}} - \frac{\partial M}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{0}.$$

Prendendo le prime  $n$  componenti di  $\mathbf{z}$ , cioè  $\mathbf{q}$ , si ha

$$\frac{\partial M}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{p}, \quad \frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}$$

e dunque

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

che sono le seconde  $n$  equazioni di Hamilton. Se ora prendiamo le seconde  $n$  componenti di  $\mathbf{z}$ , cioè  $\mathbf{p}$ , abbiamo

$$\frac{\partial M}{\partial \dot{\mathbf{p}}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial M}{\partial \mathbf{p}} = \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}$$

e dunque

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial \dot{\mathbf{p}}} - \frac{\partial M}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{0}$$

che sono le prime  $n$  equazioni di Hamilton. E viceversa.  $\square$

## 9 Trasformazioni canoniche

La scelta dei parametri lagrangiani  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ , e di conseguenza dei momenti  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ , può influenzare notevolmente la forma delle equazioni del moto, e quindi anche la loro difficoltà di risoluzione. Quindi può essere utile cercare delle nuove variabili in cui le equazioni del moto risultino più semplici.

Trattando la coppia  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  come un elemento di  $\mathbb{R}^{2n}$  (e quindi essendo disposti a “mescolare” tra loro variabili di tipo  $q$  con variabili di tipo  $p$ ), un cambio di variabili è dato da

$$\begin{cases} Q_1 = Q_1(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \\ \dots \\ Q_n = Q_n(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \\ P_1 = P_1(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \\ \dots \\ P_n = P_n(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \end{cases} \quad \text{o anche} \quad \begin{cases} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \\ \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \end{cases} \quad (25)$$

Naturalmente, per essere ben definito, un cambio di variabili dovrà essere invertibile almeno localmente, dunque il determinante della matrice jacobiana deve essere non nullo. A noi però interessano i cambi di variabili che rispettano la struttura hamiltoniana, come meglio specificato nella seguente definizione

**Definizione 9.1 (Trasformazione canonica).** Un cambio di variabili del tipo (25) è detto *trasformazione canonica* se per ogni hamiltoniana  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  esiste una hamiltoniana  $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  tale che le equazioni di Hamilton

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}$$

vengano trasformate nelle equazioni

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{P}}, \quad \dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{Q}}.$$

In questo caso le funzioni  $\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}}$  si dicono *canonicamente coniugate*. ★

Una trasformazione canonica quindi conserva l’“hamiltonianità” del sistema di equazioni, qualsiasi sia la funzione di Hamilton di partenza.

**Esempio 9.2.** In  $\mathbb{R}^{2n}$ , il cambio di variabili

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = \alpha \mathbf{q} \\ \mathbf{P} = \beta \mathbf{p} \end{cases} \quad \alpha, \beta \neq 0$$

è una trasformazione canonica e vale la relazione

$$\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = \alpha \beta \mathcal{H}\left(\frac{\mathbf{Q}}{\alpha}, \frac{\mathbf{P}}{\beta}, t\right).$$

Infatti si ha

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{Q}} = \beta \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} = -\beta \dot{\mathbf{p}} = -\dot{\mathbf{P}}, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{P}} = \alpha \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} = \alpha \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{Q}}. \quad \star$$

**Esempio 9.3.** In  $\mathbb{R}^{2n}$ , il cambio di variabili

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = \mathbf{q} + \alpha t \mathbf{p} \\ \mathbf{P} = \mathbf{p} \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

è una trasformazione canonica e vale la relazione

$$\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = \mathcal{H}(\mathbf{Q} - \alpha t \mathbf{P}, \mathbf{P}, t) + \frac{1}{2} \alpha \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}.$$

Infatti si ha

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} = -\dot{\mathbf{p}} = -\dot{\mathbf{P}}, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{P}} = -\alpha t \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} + \alpha \mathbf{P} = \alpha t \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{q}} + \alpha \mathbf{p} = \dot{\mathbf{Q}}.$$

In questo caso, se si considera un punto materiale libero di massa  $m$  in assenza di forze esterne, si ha

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} + \alpha \right) \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$$

e scegliendo  $\alpha := -1/m$  si ottiene  $\tilde{\mathcal{H}} = 0$ . Quindi le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili diventano banali:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0}.$$

Tutta la dinamica del sistema è riassunta nella trasformazione canonica. ★

**Esempio 9.4 (Esempio di trasformazione non canonica).** Per  $n = 1$  prendiamo

$$\begin{cases} q = P \sin Q \\ p = P \cos Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q = \arctan \frac{q}{p} \\ P = \sqrt{q^2 + p^2} \end{cases}$$

e consideriamo un punto materiale libero di massa unitaria e senza forze esterne, per cui  $\mathcal{H} = p^2/2$  e

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = 0.$$

Riscriviamo le equazioni del moto nelle nuove variabili: dalla seconda si ha

$$\dot{p} = \dot{P} \cos Q - P \dot{Q} \sin Q = 0 \Rightarrow \dot{P} = P \dot{Q} \tan Q$$

e sostituendola nella prima:

$$\dot{q} = \dot{P} \sin Q + P \dot{Q} \cos Q = P \cos Q \Rightarrow \dot{Q} \frac{\sin^2 Q}{\cos Q} + \dot{Q} \cos Q = \cos Q \Rightarrow \dot{Q} = \cos^2 Q$$

e quindi si trova il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{Q} = \cos^2 Q \\ \dot{P} = P \sin Q \cos Q. \end{cases}$$

Ma tale sistema non è hamiltoniano, perché se lo fosse si avrebbe

$$0 = \frac{\partial(\cos^2 Q)}{\partial Q} + \frac{\partial(P \sin Q \cos Q)}{\partial P} = -\sin Q \cos Q$$

che è assurdo. ★

In generale si può dimostrare che per una trasformazione canonica il legame tra la vecchia hamiltoniana e la nuova è tale che

$$\tilde{\mathcal{H}} = c\mathcal{H} + K$$

(scritte nelle variabili giuste) con  $c \in \mathbb{R}$  e  $K$  funzione indipendente da  $\mathcal{H}$ . Se la trasformazione canonica è indipendente dal tempo, si ha  $K \equiv 0$ . La costante  $c$  viene detta *valenza* e noi studieremo per semplicità le trasformazioni canoniche per cui  $c = 1$ , dette *univalenti o simplettiche*.

## 10 Gruppo simplettico

Esiste un modo geometrico, di capire se una trasformazione è canonica, tramite il gruppo simplettico. Denotiamo con  $J$  la matrice antisimmetrica di ordine  $2n$  data da

$$J := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

dove  $I$  è la matrice identica di ordine  $n$  e  $0$  la matrice nulla di ordine  $n$ . La matrice  $J$  è ortogonale e ha determinante 1.

**Definizione 10.1.** Una matrice quadrata  $A$  di ordine  $2n$  si dice *simplettica* se

$$AJA^T = J.$$

Si verifica facilmente (provare per credere) che l'insieme delle matrici simplettiche è chiuso rispetto al prodotto di matrici. Meno facilmente si può dimostrare che anche l'inversa e la trasposta di una matrice simplettica sono simplettiche; quindi l'insieme delle matrici simplettiche costituisce il cosiddetto *gruppo simplettico*, che è appunto un gruppo rispetto alla moltiplicazione di matrici ed è chiuso rispetto alla trasposizione. Inoltre se una matrice è simplettica vale anche l'identità

$$A^TJA = J.$$

★

Allora vale il seguente teorema.

**Teorema 10.2.** *Un cambio di variabili indipendente dal tempo*

$$\begin{cases} Q = Q(q, p) \\ P = P(q, p) \end{cases}$$

è una trasformazione canonica univalente se e solo se lo jacobiano del cambio di variabile è una matrice simplettica per ogni  $(q, p)$ .

*Dimostrazione.* Si noti che la matrice  $J$  è legata alla meccanica hamiltoniana, infatti: ponendo  $z = (q, p)$  e data un'hamiltoniana  $\mathcal{H}(z)$ , le equazioni di Hamilton si possono scrivere nella forma

$$\dot{z} = J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}. \quad (26)$$

Ora consideriamo un cambio di variabili indipendente dal tempo  $Z(z)$ , dove  $Z = (Q, P)$ : si avrà

$$\dot{Z} = A(z)\dot{z}, \quad \text{dove } A_{ij} = \frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \text{ è la matrice jacobiana del cambio di variabili.}$$

Poniamo  $\tilde{\mathcal{H}}(Z) := \mathcal{H}(z(Z))$ , da cui  $\mathcal{H}(z) = \tilde{\mathcal{H}}(Z(z))$ . Allora si ha

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_j} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Z_i} \frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = A^T \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Z}.$$

Usando le equazioni di Hamilton (26) otteniamo

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{J}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{A}^T\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{Z}}.$$

Dunque le equazioni nelle nuove variabili sono in forma hamiltoniana se e solo se  $\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{A}^T = \mathbf{J}$ , e dunque se e solo se lo jacobiano è simplettico.  $\square$

**Osservazione 10.3.** È facile vedere che tutte le matrici simplettiche hanno determinante  $\pm 1$  (in realtà si può dimostrare che hanno tutte determinante 1, anche se questo fatto non è banale). Cerchiamo di caratterizzare brevemente una matrice simplettica. Scriviamo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \text{ matrici di ordine } n.$$

Imponendo la condizione di simpletticità si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T & \mathbf{c}^T \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{d}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T & \mathbf{c}^T \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{d}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ -\mathbf{a} & -\mathbf{b} \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \mathbf{a} & \mathbf{a}^T \mathbf{d} - \mathbf{c}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T \mathbf{c} - \mathbf{d}^T \mathbf{a} & \mathbf{b}^T \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Quindi otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \mathbf{a}^T \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \mathbf{a} & \Rightarrow \quad \mathbf{a}^T \mathbf{c} \text{ è simmetrica} \\ \mathbf{b}^T \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \mathbf{b} & \Rightarrow \quad \mathbf{b}^T \mathbf{d} \text{ è simmetrica} \\ \mathbf{a}^T \mathbf{d} - \mathbf{c}^T \mathbf{b} = \mathbf{I} & \end{cases}$$

dove abbiamo eliminato alcune equazioni ridondanti. Le prime due equazioni corrispondono in tutto a  $n(n-1)$  condizioni, mentre la terza aggiunge ancora  $n^2$  condizioni, quindi in tutto ci sono  $2n^2 - n$  condizioni. Da ciò risulta che la dimensione del gruppo simplettico è

$$4n^2 - 2n^2 + n = n(2n+1).$$

★

## 11 Funzione generatrice

Cerchiamo ora un modo per “generare” delle trasformazioni canoniche univalenti. L’obiettivo è quello di avere a disposizione delle famiglie di trasformazioni canoniche per andare a cercare tra loro quella che semplifica maggiormente l’hamiltoniana (si veda più avanti il cenno al metodo di Hamilton-Jacobi).

Consideriamo quindi un cambio di variabili

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \\ \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \\ \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t). \end{cases}$$

Un modo per richiedere che il cambio di variabili sia una trasformazione canonica (univalente) è quello di chiedere che l'azione hamiltoniana nelle nuove variabili si scriva ancora nella forma usuale, ovvero che

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) - \mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{P}(t) \cdot \dot{\mathbf{Q}}(t) - \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{Q}(t), \mathbf{P}(t), t)) dt + c.$$

Infatti, se le due azioni coincidono a meno di una costante additiva, allora sicuramente avranno gli stessi punti stazionari, quindi le stesse soluzioni del moto. Per l'arbitrarietà dei tempi  $t_0, t_1$  e dell'hamiltoniana  $\mathcal{H}$ , gli integrandi devono coincidere a meno di una derivata totale, cioè:

$$\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) - \mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = \mathbf{P}(t) \cdot \dot{\mathbf{Q}}(t) - \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{Q}(t), \mathbf{P}(t), t) + \frac{dF}{dt} \quad (27)$$

dove  $F$  è un'arbitraria funzione del tempo.

Scegliamo ora  $F$  della forma

$$F(t) := F_1(\mathbf{q}(t), \mathbf{Q}(t), t)$$

dove la funzione  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  è arbitraria e regolare e soddisfa l'ipotesi

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{Q}} \text{ non singolare.} \quad (28)$$

Allora derivando per composizione si ha

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

e sostituendo nella (27) e raccogliendo si trova

$$\left( \mathbf{p} - \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}} \right) \cdot \dot{\mathbf{q}} - \left( \mathbf{P} + \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{Q}} \right) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H} - \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0.$$

Per l'arbitrarietà dei moti si ottiene

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{P} = -\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{Q}}, \end{cases} \quad \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (29)$$

Da questo sistema, grazie all'ipotesi (28) si possono esprimere le variabili nuove in funzione di quelle vecchie. Quindi, assegnando una generica funzione regolare  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ , tramite (29) si ottiene una trasformazione canonica. La funzione  $F_1$  viene detta *funzione generatrice del primo tipo*, perché "genera" delle trasformazioni canoniche.

**Esempio 11.1.** Per  $n = 1$ , sia  $F_1(q, Q) = \ln(q + Q)$  (supponiamo  $q, Q > 0$ ). Dalla (29) abbiamo

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \frac{1}{q + Q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -\frac{1}{q + Q}$$

da cui ricaviamo, esplicitando le variabili nuove,

$$\begin{cases} Q = -q + \frac{1}{p} \\ P = -p. \end{cases}$$

Si può verificare che tale trasformazione è certamente canonica, ad esempio mostrando che lo jacobiano è simplettico. ★

Le funzioni generatrici più interessanti sono quelle del *secondo tipo*: esse si ottengono scegliendo

$$F(t) := F_2(\mathbf{q}(t), \mathbf{P}(t), t) - \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{P}(t),$$

sempre con l'ipotesi

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{P}} \text{ non singolare.}$$

In questo caso, derivando per composizione si ha

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{P}} \cdot \dot{\mathbf{P}} + \frac{\partial F_2}{\partial t} - \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{P}}$$

e sostituendo nella (27) si trova

$$\left( \mathbf{p} - \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}} \right) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \left( \mathbf{Q} - \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{P}} \right) \cdot \dot{\mathbf{P}} + \tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H} - \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0.$$

Di nuovo, per l'arbitrarietà dei moti si ottiene

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{Q} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{P}}, \end{cases} \quad \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (30)$$

**Esempio 11.2.** Per  $n = 1$ , sia  $F_2(q, P) = q^{1+\alpha}P$ ,  $\alpha > 0$ . Dalla (30) abbiamo

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = (1 + \alpha)q^\alpha P, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = q^{1+\alpha}.$$

Anche qui esplicitiamo le variabili nuove:

$$\begin{cases} Q = q^{1+\alpha} \\ P = \frac{pq^{-\alpha}}{1+\alpha} \end{cases}$$

ottenendo una trasformazione canonica. ★

Esistono anche funzioni generatrici del *terzo tipo*, che si ottengono scegliendo

$$F(t) := F_3(\mathbf{Q}(t), \mathbf{p}(t), t) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$$

con l'ipotesi

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{Q}} \text{ non singolare}$$

e in questo caso si ha

$$\begin{cases} \mathbf{q} = -\frac{\partial F_3}{\partial \mathbf{p}} \\ \mathbf{P} = -\frac{\partial F_3}{\partial \mathbf{Q}}, \end{cases} \quad \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \quad (31)$$

Infine, si hanno anche funzioni generatrici del *quarto tipo*, che si ottengono scegliendo

$$F(t) := F_4(\mathbf{p}(t), \mathbf{P}(t), t) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$$

con l'ipotesi

$$\frac{\partial^2 F_4}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{P}} \quad \text{non singolare}$$

e in questo caso si ha

$$\begin{cases} \mathbf{q} = -\frac{\partial F_4}{\partial \mathbf{p}} \\ \mathbf{Q} = \frac{\partial F_4}{\partial \mathbf{P}}, \end{cases} \quad \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \quad (32)$$

Le funzioni generatrici del secondo tipo sono interessanti per vari motivi. Tra questi c'è il fatto che la *trasformazione identica*, cioè il cambio di variabili banale che non cambia niente, può essere ottenuto solo con un procedimento del secondo tipo, in questo modo:

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{P}.$$

È chiaro che tale cambio in sé non è molto interessante, ma spesso si lavora in un “intorno dell’identità”, soprattutto quando si usano dei metodi di perturbazione, e quindi è comodo partire da una classe di funzioni generatrici che possano generare l’identità.

**Teorema 11.3 (del sollevamento).** *Ogni cambio di coordinate  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$  che coinvolga solo i parametri lagrangiani può essere esteso a una trasformazione canonica del secondo tipo.*

*Dimostrazione.* Poniamo

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) := \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n P_j Q_j(\mathbf{q}).$$

Si ha che la matrice

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{P}} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}}$$

è non singolare poiché  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$  è un cambio di variabili. Inoltre

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n P_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \\ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i(\mathbf{q}) \end{cases}$$

e dalla prima equazione si possono esprimere le  $\mathbf{P}$  in funzione delle  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  proprio perché la matrice  $\partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{q}$  è invertibile, mentre la seconda è proprio il cambio di variabili  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$  di partenza.  $\square$

## 12 Cenno al metodo di Hamilton-Jacobi

Abbiamo già accennato al fatto che uno degli scopi di studiare le trasformazioni canoniche è quello di fare in modo che la funzione di Hamilton sia più semplice, così da avere anche equazioni differenziali del moto più semplici. Un metodo è il seguente.

Scegliamo per esempio una funzione generatrice del secondo tipo  $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ . Sappiamo dalla (30) che

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

e cerchiamo una funzione  $F_2$  che renda nulla (o costante) la nuova hamiltoniana:

$$\mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0.$$

Ricordando che  $\mathbf{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}}$  e sostituendo nell'hamiltoniana, si trova la cosiddetta *equazione di Hamilton-Jacobi*

$$\mathcal{H}\left(\mathbf{q}, \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = 0 \quad (33)$$

che è un'equazione differenziale alle derivate parziali (PDE) del primo ordine, in cui l'incognita è la funzione  $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ .

Di solito si interpreta questa equazione come funzione delle sole variabili  $(\mathbf{q}, t)$ , e trovare un *integrale completo* di tale equazione significa trovare una famiglia di soluzioni

$$F_2(\mathbf{q}, \xi_1, \dots, \xi_n, t)$$

dipendente dagli  $n$  parametri  $\xi_1, \dots, \xi_n$  tale che la matrice hessiana

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial \xi_j}$$

sia non singolare per ogni  $\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}, t$ .

Poiché l'hamiltoniana nelle nuove variabili è nulla, le equazioni del moto sono immediate:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{Q} = \text{cost.} \\ \mathbf{P} = \text{cost.} \end{cases}$$

quindi in particolare  $\boldsymbol{\xi}$  è costante. Quindi si determina la costante  $\boldsymbol{\xi}$  in funzione delle condizioni iniziali e per tornare nelle variabili originarie si ha subito

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}, t),$$

e poi si calcola

$$Q_i = \text{cost.} \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial \xi_i}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}, t) = \text{cost.}$$

e si risolve rispetto a  $\mathbf{q}$ .

## 13 Parentesi di Poisson

**Definizione 13.1 (Parentesi di Poisson).** Siano  $F, G : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni di classe  $C^1$  delle variabili  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ . La funzione  $[F, G] : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  data da

$$[F, G](\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) := \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

si dice *parentesi di Poisson* delle funzioni  $F, G$ . ★

C'è uno stretto legame tra le parentesi di Poisson e la matrice  $\mathbf{J}$  di ordine  $2n$  introdotta in precedenza

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti, con la notazione  $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$  si ha

$$[F, G] = \sum_{i,j=1}^{2n} J_{ij} \frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial G}{\partial z_j} = \nabla_{\mathbf{z}} F \cdot \mathbf{J} \nabla_{\mathbf{z}} G. \quad (34)$$

**Teorema 13.2 (Proprietà delle parentesi di Poisson).** *La parentesi di Poisson è un'operazione bilineare e antisimmetrica. Se poi le funzioni sono di classe  $C^2$  si ha*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [F, G] &= \left[ \frac{\partial F}{\partial x}, G \right] + \left[ F, \frac{\partial G}{\partial x} \right] \quad (\text{Regola di Leibniz}) \\ [[F, G], H] + [[G, H], F] + [[H, F], G] &= 0 \quad (\text{Identità di Jacobi}), \end{aligned}$$

dove il simbolo  $x$  nella prima equazione denota una qualsiasi tra le variabili scalari  $q_i, p_j, t$  da cui dipendono le funzioni  $F, G$ .

L'identità di Jacobi è tipica delle cosiddette *algebre di Lie*, ed è verificata per esempio dal prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ .

*Dimostrazione.* La bilinearità e l'antisimmetria sono ovvie. Verifichiamo la regola di Leibniz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [F, G] &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \mathbf{p}} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \mathbf{q}} \\ &= \left[ \frac{\partial F}{\partial x}, G \right] + \left[ F, \frac{\partial G}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

dove abbiamo accorpato il primo addendo col terzo e il secondo col quarto, e usato la commutatività della derivata seconda.

La verifica dell'identità di Jacobi è piuttosto lunga e noiosa, cerchiamo di affrontarla semplificando le notazioni. Dalla formula (34)

$$[F, G] = \sum_{i,j=1}^{2n} J_{ij} \frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial G}{\partial z_j}$$

e dalla regola di Leibniz segue che

$$\begin{aligned} [[F, G], H] &= \sum_{i,j=1}^{2n} J_{ij} \frac{\partial [F, G]}{\partial z_i} \frac{\partial H}{\partial z_j} = \sum_{i,j=1}^{2n} J_{ij} \left( \left[ \frac{\partial F}{\partial z_i}, G \right] + \left[ F, \frac{\partial G}{\partial z_i} \right] \right) \frac{\partial H}{\partial z_j} \\ &= \sum_{i,j,k,h=1}^{2n} J_{ij} J_{hk} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial z_h \partial z_i} \frac{\partial G}{\partial z_k} + \frac{\partial F}{\partial z_h} \frac{\partial^2 G}{\partial z_k \partial z_i} \right) \frac{\partial H}{\partial z_j}. \end{aligned}$$

Analogamente, gli altri due addendi dell'identità di Jacobi si trovano facendo una permutazione ciclica delle funzioni  $F, G, H$ :

$$[[G, H], F] = \sum_{i,j,k,h=1}^{2n} J_{ij} J_{hk} \left( \frac{\partial^2 G}{\partial z_h \partial z_i} \frac{\partial H}{\partial z_k} + \frac{\partial G}{\partial z_h} \frac{\partial^2 H}{\partial z_k \partial z_i} \right) \frac{\partial F}{\partial z_j},$$

$$[[F, G], H] = \sum_{i,j,k,h=1}^{2n} J_{ij} J_{hk} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial z_h \partial z_i} \frac{\partial F}{\partial z_k} + \frac{\partial H}{\partial z_h} \frac{\partial^2 F}{\partial z_k \partial z_i} \right) \frac{\partial G}{\partial z_j}.$$

Sommiamo ora i termini contenenti le derivate seconde di  $F$ :

$$\sum_{i,j,k,h=1}^{2n} J_{ij} J_{hk} \frac{\partial^2 F}{\partial z_h \partial z_i} \frac{\partial G}{\partial z_k} \frac{\partial H}{\partial z_j} + \sum_{i,j,k,h=1}^n J_{ij} J_{hk} \frac{\partial H}{\partial z_h} \frac{\partial^2 F}{\partial z_k \partial z_i} \frac{\partial G}{\partial z_j}.$$

Se nella seconda sommatoria cambiamo nome agli indici (muti)  $h \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i \rightarrow h$ , otteniamo

$$\sum_{i,j,k,h=1}^{2n} J_{ij} J_{hk} \frac{\partial^2 F}{\partial z_h \partial z_i} \frac{\partial G}{\partial z_k} \frac{\partial H}{\partial z_j} + \sum_{h,k,i,j=1}^n J_{hk} J_{ji} \frac{\partial H}{\partial z_j} \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_h} \frac{\partial G}{\partial z_k}$$

e dalla antisimmetria di  $J$  e la commutatività delle derivate seconde

$$\sum_{i,j,k,h=1}^{2n} J_{ij} J_{hk} \frac{\partial^2 F}{\partial z_h \partial z_i} \frac{\partial G}{\partial z_k} \frac{\partial H}{\partial z_j} - \sum_{h,k,i,j=1}^{2n} J_{hk} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial z_j} \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_h} \frac{\partial G}{\partial z_k} = 0.$$

Lo stesso succede quando consideriamo i termini contenenti le derivate seconde di  $G$  o quelle di  $H$ , quindi l'identità di Jacobi è verificata.  $\square$

Vediamo ora alcune proprietà che legano le parentesi di Poisson agli integrali primi.

**Proposizione 13.3.** *Sia  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  moto di un sistema con hamiltoniana  $\mathcal{H}$ , e sia  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  una quantità. Allora si ha*

$$\frac{dF}{dt} = [F, \mathcal{H}] + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

In particolare,  $F$  è un integrale primo del sistema se e solo se  $[F, \mathcal{H}] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$ . Se  $F$  non dipende esplicitamente dal tempo,  $F$  è un integrale primo del sistema se e solo se  $[F, \mathcal{H}] = 0$ .

*Dimostrazione.* Applichiamo il Teorema del differenziale totale alla funzione  $t \mapsto F(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t)$ :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Se  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  è moto del sistema, allora valgono le equazioni di Hamilton

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}},$$

quindi

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial F}{\partial t} = [F, \mathcal{H}] + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad \square$$

Si noti che da questa proposizione segue immediatamente che  $\mathcal{H}$  non dipende esplicitamente dal tempo se e solo se è un integrale primo del sistema; infatti dall'antisimmetria è ovvio che  $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = 0$ .

**Teorema 13.4 (Teorema di Jacobi-Poisson).** *Siano  $F, G$  due funzioni come nella Definizione 13.1. Allora lungo un moto  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  del sistema si ha*

$$\frac{d}{dt}[F, G] = \left[ \frac{dF}{dt}, G \right] + \left[ F, \frac{dG}{dt} \right].$$

In particolare, se  $F, G$  sono due integrali primi del sistema, allora anche  $[F, G]$  è un integrale primo del sistema.

*Dimostrazione.* Dalla proposizione precedente si ha

$$\frac{dF}{dt} = [F, \mathcal{H}] + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \frac{dG}{dt} = [G, \mathcal{H}] + \frac{\partial G}{\partial t}, \quad \frac{d}{dt}[F, G] = [[F, G], \mathcal{H}] + \frac{\partial}{\partial t}[F, G].$$

Applichiamo al membro di destra dell'ultima formula l'identità di Jacobi e la regola di Leibniz:

$$\frac{d}{dt}[F, G] = -[[G, \mathcal{H}], F] - [[\mathcal{H}, F], G] + \left[ \frac{\partial F}{\partial t}, G \right] + \left[ F, \frac{\partial G}{\partial t} \right].$$

Associando il primo e l'ultimo addendo e scambiando  $[G, \mathcal{H}]$  con  $F$ , otteniamo

$$-[[G, \mathcal{H}], F] + \left[ F, \frac{\partial G}{\partial t} \right] = [[F, G], \mathcal{H}] + \left[ F, \frac{\partial G}{\partial t} \right] = \left[ F, [G, \mathcal{H}] + \frac{\partial G}{\partial t} \right] = \left[ F, \frac{dG}{dt} \right].$$

Allo stesso modo col secondo e il terzo addendo:

$$-[[\mathcal{H}, F], G] + \left[ \frac{\partial F}{\partial t}, G \right] = [[F, \mathcal{H}], G] + \left[ \frac{\partial F}{\partial t}, G \right] = \left[ [F, \mathcal{H}] + \frac{\partial F}{\partial t}, G \right] = \left[ \frac{dF}{dt}, G \right].$$

Quindi ne risulta la tesi. □

Il Teorema di Jacobi-Poisson è uno strumento utile per procurarsi nuovi integrali primi a partire da integrali primi già noti; però può capitare che la quantità che si ottiene da  $[F, G]$  sia funzionalmente dipendente da  $F$  e  $G$  e quindi non aggiunga nulla alla conoscenza di integrali primi.

**Osservazione 13.5.** Le parentesi di Poisson offrono anche un modo alternativo per scrivere le equazioni di Hamilton. Infatti, consideriamo le funzioni proiezione

$$q_i : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto q_i, \quad p_j : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto p_j.$$

Poiché non dipendono esplicitamente dal tempo, dalla Proposizione 13.3 si ha che, lungo un moto,

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{dq_i}{dt} = [q_i, \mathcal{H}] = \frac{\partial q_i}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial q_i}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_j &= \frac{dp_j}{dt} = [p_j, \mathcal{H}] = \frac{\partial p_j}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial p_j}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

Quindi le equazioni di Hamilton si possono scrivere come

$$\begin{cases} \dot{q}_i = [q_i, \mathcal{H}] \\ \dot{p}_j = [p_j, \mathcal{H}] \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n$$

o anche come

$$\dot{z}_i = [z_i, \mathcal{H}] \quad i = 1, \dots, 2n. \quad \star$$

Le parentesi di Poisson forniscono un criterio per verificare se un cambio di variabili indipendenti dal tempo sia una trasformazione canonica (univalente) oppure no. Vale infatti il seguente teorema:

**Teorema 13.6 (Criterio di canonicità con le parentesi di Poisson).** *Un cambio di variabili indipendente dal tempo*

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{cases}$$

è una trasformazione canonica univalente se e solo se valgono le  $n(2n - 1)$  condizioni

$$[Q_i, Q_j] = 0, \quad [P_i, P_j] = 0, \quad [Q_i, P_j] = \delta_{ij} \quad \text{per ogni } i, j = 1, \dots, n,$$

dove  $\delta_{ij}$  è il simbolo di Kronecker, ovvero  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ .

In particolare, nel caso  $n = 1$  un cambio di variabili indipendente dal tempo è canonico se e solo se

$$[Q, P] = 1.$$

*Dimostrazione.* Per il Teorema 10.2 un cambio di variabili indipendente dal tempo è una trasformazione canonica se e solo se

$$\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{A}^\top = \mathbf{J}$$

dove  $\mathbf{A}$  è lo jacobiano del cambio di variabili. Usando la notazione  $\mathbf{Z}(\mathbf{z}) = (\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$ , si ha che il cambio è canonico se e solo se

$$\sum_{h,k=1}^{2n} J_{hk} \frac{\partial Z_i}{\partial z_h} \frac{\partial Z_j}{\partial z_k} = J_{ij} \quad \text{per ogni } i, j = 1, \dots, 2n.$$

Scegliendo  $1 \leq i, j \leq n$  e usando la (34) si ha

$$\sum_{h,k=1}^{2n} J_{hk} \frac{\partial Q_i}{\partial z_h} \frac{\partial Q_j}{\partial z_k} = [Q_i, Q_j] = 0 \quad \text{per ogni } i, j = 1, \dots, n.$$

Allo stesso modo, scegliendo  $i = n + r$  e  $j = n + s$  per  $1 \leq r, s \leq n$  si ha

$$\sum_{h,k=1}^{2n} J_{hk} \frac{\partial P_r}{\partial z_h} \frac{\partial P_s}{\partial z_k} = [P_r, P_s] = 0 \quad \text{per ogni } r, s = 1, \dots, n.$$

Infine, scegliendo  $1 \leq i \leq n$  e  $j = n + s$  per  $1 \leq s \leq n$  si ha

$$\sum_{h,k=1}^{2n} J_{hk} \frac{\partial Q_i}{\partial z_h} \frac{\partial P_s}{\partial z_k} = [Q_i, P_s] = \delta_{is} \quad \text{per ogni } i, s = 1, \dots, n.$$

□

**Corollario 13.7.** Siano  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ,  $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  due funzioni e sia

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{cases}$$

una trasformazione canonica indipendente dal tempo. Ponendo

$$\tilde{F}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) := F(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})), \quad \tilde{G}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) := G(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}))$$

si ha

$$[\tilde{F}, \tilde{G}]_{(\mathbf{Q}, \mathbf{P})} = [F, G]_{(\mathbf{q}, \mathbf{p})}$$

dove il pedice indica rispetto a quali coordinate vengono calcolate le parentesi di Poisson.

*Dimostrazione.* Partiamo dal fatto che

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \tilde{F}(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p})), \quad G(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \tilde{G}(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$$

e deriviamo per composizione. Si ha

$$\begin{aligned} [F, G]_{(\mathbf{q}, \mathbf{p})} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \\ &= \sum_{i,h,k=1}^n \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_h}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial P_h}{\partial q_i} \right) \left( \frac{\partial G}{\partial Q_h} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial G}{\partial P_h} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) \left( \frac{\partial G}{\partial Q_h} \frac{\partial Q_h}{\partial q_i} + \frac{\partial G}{\partial P_h} \frac{\partial P_h}{\partial q_i} \right) \right]. \end{aligned}$$

Se ora svolgiamo tutti i prodotti e raccogliamo i termini simili come derivate di  $F$  e  $G$  otteniamo

$$\begin{aligned} [F, G]_{(\mathbf{q}, \mathbf{p})} &= \sum_{h,k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial G}{\partial Q_h} [Q_k, Q_h] + \frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial G}{\partial P_h} [Q_k, P_h] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial G}{\partial Q_h} [P_k, Q_h] + \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial G}{\partial P_h} [P_k, P_h] \right). \end{aligned}$$

Applicando il Teorema 13.6 troviamo quindi

$$\begin{aligned} [F, G]_{(\mathbf{q}, \mathbf{p})} &= \sum_{h,k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial G}{\partial P_h} \delta_{kh} - \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial G}{\partial Q_h} \delta_{hk} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial G}{\partial P_k} - \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial G}{\partial Q_k} \right) = [F, G]_{(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}. \end{aligned} \quad \square$$

## Riferimenti bibliografici

- [1] A. Marzocchi, Dispense di Meccanica Analitica, 2012.
- [2] F. R. Gantmacher, Lezioni di meccanica analitica, Editori Riuniti 1980

- [3] H. Goldstein, Meccanica classica, Zanichelli 1971
- [4] C. Banfi, Lezioni di meccanica analitica, ISU Università Cattolica 1997
- [5] E. DiBenedetto, Classical Mechanics, Birkhäuser 2011
- [6] L. N. Hand, J. D. Finch, Analytical Mechanics, Cambridge University Press 1998
- [7] G. J. Sussman, J. Wisdom, M. E. Mayer, Structure and Interpretation of Classical Mechanics, The MIT Press 2000