

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Prova scritta di Sistemi Dinamici

18 luglio 2025

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = (\mu^2 - x^2)(\mu^2 + x^2 - 4)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Un sistema di equazioni differenziali è della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = x(k - y) \\ \dot{y} = y(2x - 2). \end{cases}$$

Si trovino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità, anche asintotica, al variare di $k \neq 0$.

3. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha \sin x - y \\ \dot{y} = \alpha x + y \end{cases}$$

e se ne discuta la stabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, evidenziandone fuochi, nodi, selle, centri.

4. Si studi la stabilità degli equilibri del sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = \frac{\alpha x_h}{1 + 2x_h + x_h^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$